OKU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
6(Ek Sayı): 415-425, 2023

OKU Journal of The Institute of Science and Technology, 6(Suppl): 415-425, 2023

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Dergisi

Osmaniye Korkut Ata University
Journal of The Institute of Science and
Technology

Bazı Graf Sınıflarında 1-Düzenli ve 2-Düzenli Ayrıt Bağlantılılık

İdris ÇİFTÇİ[1*]

[1]Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, 65080, Van, Türkiye

[1]https://orcid.org/0000-0002-2698-0807
*Sorumlu yazar: idrisciftci@yyu.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihçesi:
Geliş tarihi: 29.11.2022
Kabul tarihi:23.05.2023
Online Yayınlanma: 20.12.2023

Anahtar Kelimeler:
Koşullu Bağlantılılık
Ayrıt Bağlantılılık
Düzenli Ayrıt Bağlantılılık
1-Düzenli Ayrıt Bağlantılılık
2-Düzenli Ayrıt Bağlantılılık

ÖZ

Düzenli ayrıt bağlantılılık yeni bir koşullu bağlantılılık türü olup, bu kavram bağlantısız yapılan her parça grafın düzenli olması esasına dayanır. Bu çalışmada, hiperküp graflarında ve bir tam grafın yol, çevre ve bir tam grafla kartezyen çarpımından elde edilen graflarda 1-düzenli ve 2-düzenli ayrıt bağlantılılık incelenmiştir.

On 1-Regular and 2- Regular Edge Connectivity in Some Graph Classes

Research Article

Article History:
Received: 29.11.2022
Accepted: 23.05.2023
Published online: 20.12.2023

Keywords:
Conditional Connectivity
Edge Connectivity
Regular Edge Connectivity
1-Regular Edge Connectivity
2-Regular Edge Connectivity

ABSTRACT

Regular edge connectivity is a new type of conditional connectivity, and this concept is based on the regularity of every disconnected component graphs. In this study, 1-regular and 2-regular edge connectivity were investigated in hypercube graphs and graphs obtained from path, cycle and complete graphs with Cartesian product a complet graph.

To Cite: Çiftçi İ. Bazı Graf Sınıflarında 1-Düzenli ve 2-Düzenli Ayrıt Bağlantılılık. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2023; 6(Ek Sayı): 415-425.

1. Giriş

Uygulamalı matematiğin bir dalı olarak kabul edilen graf teorisi, fen ve mühendislikte karşılaşılan birçok bağlantılılık probleminin çözümünde kullanılmaktadır. Graflardaki tepeler, iletişim ağlarındaki bağlantı noktalarını temsil ederler. Graflarla ifade edilen herhangi bir ağ yapısındaki bozulmalar durumunda bile bağlantı noktaları arasındaki iletişimin sürdürülebilirliği esastır. Bir iletişim ağının bazı merkezlerinde ya da hatlarında meydana gelecek bozulmalar, ağın fonksiyonunu tam olarak gerçekleştirmesini önler. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken ağ topolojileri içinden bozulmalara karşı direnci olabildiğince çok olan birinin, diğerlerine tercih edilmesi bu tip bir sorunla karşılaşılmasını baştan azaltmış olur. Bilgisayar bilimlerinde, bir bilgisayar ağındaki bilgisayarlar tepelerle, bilgisayar ağındaki iletişim kabloları ayrıtlarla modellenebilir. “Bir bilgisayar ağında en az kaç tane bilgisayar veya iletişim kablosu bozulursa ağ işlevini yitirir?” sorusuna cevap aranırken graf modelinden yararlanılır.

Bağlantılılık kavramı; ağ tasarlama, planlama ve dayanıklılık problemlerinin algoritmik açıdan incelenmesinde önemli bir yere sahiptir. Bir ağdaki bağlantılılığın kalitesi, bu ağı temsil eden graftaki tepelerin ve ayrıtların bağlantılılığı ile ilişkilidir.

Bir bağlantılı graftan silindiğinde bu grafı bağlantısız yapan tepeye kesim tepe, kesim tepelerinden oluşan minimum kardinaliteli kümeye ise kesim kümesi denir. Kesim kümesinin eleman sayısına kesim değeri denir. Bu değer, grafların bağlantılılığını ifade etmek için kullanılır. Bir bağlantılılık probleminde, bağlantılılık değerine ulaşılabilen veya bu değerin muhafaza edilebildiği bir graf tasarlanır ya da mevcut graf üzerinde değişiklik yapılır.

Bir bağlantılı graftaki herhangi iki tepe arasındaki kesişmeyen yolların sayısı ile bağlantılılık sayısı arasındaki yakın ilişkiyi ifade eden teoremi, Menger 1927 yılında ispatlamıştır. Bağlantı problemleri ile ilgili birçok algoritma, bu teorem ve bu teoremin yorumlanması ile geliştirilmiştir. Geliştirilen bu algoritmalar vasıtasıyla bir grafın bağlantılılık sayısı bulunabilmektedir. Ancak hangi tepe veya tepelerin silinmesi gerektiği bu algoritmalar yardımıyla bulunamamaktadır. İşte bir grafı bağlantısız yaparken belli şartları sağlayan, hangi tepelerin silinmesi gerektiğini bulmak için koşullu bağlantılılık kavramı tanımlanmıştır (Harary, 1983).

İlgili literatür incelendiğinde, koşullu bağlantılılığın iki yeni çeşidi olan kısıtlı bağlantılılık, Latifi ve ark. (1994) tarafından ve ekstra bağlantılılık ise Fabrega ve Fiol (1996) tarafından tanımlanmıştır. Zhou ve Ou (2014), grafların korona çarpımlarında kısıtlı bağlantılılığın değerlerini araştırdılar. Ou ve Zhou (2015), grafların kuvvetli çarpımlarında kısıtlı bağlantılılığın değerlerini araştırdılar. Wei ve Hsieh (2017), yerel olarak bükülmüş küplerin h-kısıtlı bağlantılılığını incelediler. Balbuena ve Marcote (2019), Kneser graflarında kısıtlı bağlantılılığı karakterize ettiler. Ma ve ark. (2019), grafların kronoker çarpımında kısıtlı bağlantılılığı araştırdılar. Lin ve ark. (2020), ayrık yıldız ağları için kısıtlı bağlantılılığı incelediler. Li ve ark. (2021), genelleştirilmiş hiperküpler için kısıtlı bağlantılılığı hesapladılar. Liu ve Meng (2021), Dcell ağlarında kısıtlı bağlantılılığı hesapladılar. Li ve Yang (2013), hiper graflar için ekstra bağlantılılığı incelediler. Yang ve Li (2014), ekstra kenar bağlantılılık açısından katlanmış hiperküplerin güvenilirliğini araştırdılar. Zhang ve Zhou (2015), katlı hiperküpler için ekstra bağlantılılığı hesapladılar. Hao ve ark. (2016), simetrik graflarda *2*-ekstra bağlantılılığı araştırdılar. Wang ve ark. (2016), balon sıralı yıldız grafları için ekstra bağlantılılığı karakterize ettiler. Lü (2017), dengeli hiperküpler için ekstra bağlantılılığı inceledi. Zhou (2017), hiperküp ağlarına benzeyen graf sınıfları için ekstra bağlantılılığı hesapladı. Li ve Xu (2018), $3-$ekstra bağlantılılığı dengeli hiperküpler için araştırdılar. Lv ve ark. (2020), düzenli iletişim ağlarında ekstra bağlantılılığı hesapladılar. Li ve ark. (2021), bazı ağlarda ekstra bağlantılılığın parça bağlantılılık ile ilişkisini incelediler. Guo ve ark. (2021), düzenli graflarda ekstra ayrıt bağlantılılığın parça ayrıt-bağlantılılık ile ilişkisini incelediler. Zhu ve ark. (2021), hiperküpler için izoperimetrik eşitsizliklerle ilgili sonuçların ekstra bağlantılılıklarını elde etmek için kullanılabileceğini gösterdiler. Son olarak Tarakmi ve ark. (2021), kimyasal graf teoride çok önemli bir yere sahip fullerene grafları için ekstra bağlantılılığı incelediler. Graflardaki düzenlilik kavramı ile bağlantılılık kavramı arasındaki ilişkinin kurulduğu düzenli ayrıt-bağlantılılık kavramı Ediz ve Çiftçi (2022) tarafından tanımlanmıştır.

Bu çalışmada, hiperküp graflarında *1*-düzenli ve *2*-düzenli ayrıt bağlantılılık incelenmiştir. Ayrıca bir tam grafın yol, çevre ve bir tam grafla kartezyen çarpımından elde edilen graflarda *1*-düzenli ve *2*-düzenli ayrıt bağlantılılık hesaplanmıştır.

2. Temel Bilgiler

Bu bölümde temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. $G=(V,E)$ grafının herhangi bir i tepesine bağlı ayrıt sayısına i tepesinin derecesi denir ve $\deg_G i$ veya kısaca $\deg i$ ile gösterilir (Diestel, 2005).

Tanım 2.2. Basit bir grafın herhangi iki tepesi arasında bir ayrıt bulunuyorsa, yani her bir tepe çifti bağlantılı ise bu grafa tam graf denir ve n tepeli bir tam graf K_n ile gösterilir (Wallis, 2007).

Tanım 2.3. Her bir tepesi aynı dereceye sahip olan grafa düzenli graf denir. Özel olarak her bir tepesi r dereceye sahip olan grafa, $r-$dereceli düzenli graf veya $r-$düzenli graf denir (Deo, 2017).

Tanım 2.4. Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı tepelerinden ve ayrıtlarından oluşan dizisine yürüme denir ve W ile gösterilir. Yani yürüme, $W=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ şeklinde bir dizidir. $1\le i\le k$ için e_i nin uçları v_{i-1} ve v_i tepeleridir. W ya, v_0 dan v_k ya bir yürüme veya (v_0,v_k) yürümesi denir. v_0 tepesine W yürümesinin başlangıç noktası, v_k tepesine W yürümesinin bitiş noktası ve $v_1,v_2,\ldots,v_{k-1}$ tepelerine de W yürümesinin iç noktaları denir. k tam sayısına, yani, yürümedeki ayrıt sayısına W 'nun uzunluğu denir (Rahman, 2018).

Tanım 2.5. Her bir ayrıtın ve tepenin en fazla bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir ve P ile gösterilir. Yani, bir $W=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ yürümesinde $e_1,e_2,\ldots,e_k$ ayrıtlarının ve $v_0,v_1,\ldots,v_k$ tepelerinin her biri farklı ise W yürümesine yol denir (Wallis, 2007).

Tanım 2.6. Başlangıç ve bitiş tepesi aynı olan yola çevre ya da devir denir ve n tepeli bir çevre C_n ile gösterilir. Çevredeki her bir i tepesinin derecesi $\deg i=2$ dir (Diestel, 2005).

Tanım 2.7. Herhangi iki tepesi arasında en az bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir (Rahman, 2018).

Tanım 2.8. $G_1=(V_1,E_1)$ ve $G_2=(V_2,E_2)$ iki graf olmak üzere bu iki grafın kartezyen çarpımı, $G_1\times G_2$ ile gösterilir ve $u_1,v_1\in V_1$ ve $u_2,v_2\in V_2$ için tepeler kümesi

$$G_1\times G_2=\{uv \mid u=(u_1,u_2)\ ,\ v=(v_1,v_2)\in V_1\times V_2\}$$

ile tanımlı olup grafın, herhangi iki $u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$ tepelerinin komşuluğu,

$$u \sim v \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \ \text{ ve } \ u_2 \sim v_2 \\ u_2 = v_2 \ \text{ ve } \ u_1 \sim v_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır (Diestel, 2005).

Tanım 2.9. $Q_1 \cong K_2$ olmak üzere,

$$Q_n \cong Q_{n-1} \times K_2$$

grafına hiperküp grafı denir (Rahman, 2018).

Tanım 2.10. Bağlantılı bir G grafını bağlantısız bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılan minimum tepe sayısına bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. Burada,

$$\kappa(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\}$$

dır (West, 2001).

Tanım 2.11. Bağlantılı bir G grafını bağlantısız bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılan minimum ayrıt sayısına ayrıt-bağlantılılık sayısı denir ve $\lambda(G)$ ile gösterilir. Burada,

$$\lambda(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S|\}$$

dır (West, 2001).

Tanım 2.12. G bağlantılı bir graf, h bir pozitif tamsayı olmak üzere, F, $G-F$ nin bağlantısız olduğu en küçük tepe alt kümesi ve $\delta(G-F) \geq h$ ise F nin eleman sayısına G nin $h-$kısıtlı bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa^h(G)$ ile gösterilir (Latifi ve ark., 1994).

Tanım 2.13. G bağlantılı bir graf, h bir pozitif tamsayı olmak üzere, F, $G-F$ nin bağlantısız olduğu en küçük ayrıt alt kümesi ve $\delta(G-F) \geq h$ ise F nin eleman sayısına G nin $h-$kısıtlı ayrıt-bağlantılılık sayısı denir ve $\lambda^h(G)$ ile gösterilir (Latifi ve ark., 1994).

Tanım 2.14. G bağlantılı bir graf, h bir pozitif tamsayı olmak üzere, F, $G-F$ nin bağlantısız olduğu en küçük tepe alt kümesi ve bağlantısız graftaki her bir parça alt graflarının eleman sayısı h den büyük ise F nin eleman sayısına G'nin $h-$ekstra bağlantılılık sayısı denir ve $\kappa^{eh}(G)$ ile gösterilir (Fabrega ve Fiol, 1996).

Tanım 2.15. G bağlantılı bir graf, h bir pozitif tamsayı olmak üzere, F, $G-F$ nin bağlantısız olduğu en küçük ayrıt alt kümesi ve bağlantısız graftaki her bir parça alt graflarının eleman sayısı h den büyük ise F nin eleman sayısına G nin $h-$ekstra ayrıt-bağlantılılık sayısı denir ve $\lambda^{eh}(G)$ ile gösterilir (Fabrega ve Fiol, 1996).

Tanım 2.16. G bir graf ve S de bu grafın ayrıtlarından oluşan bir küme olsun. $G-S$, bağlantısız ve her bir bağlantısız parça $k-$düzenli bir graf ise S ye G nin bir $k-$düzenli ayrıt kesim kümesi denir. G nin minimum kardinaliteli $k-$düzenli ayrıt kesim kümesinin eleman sayısına G nin $k-$düzenli ayrıt-bağlantılılığı denir ve

$$\lambda^{kr}(G)=|S|$$

ile gösterilir (Ediz ve Çiftçi, 2022).

Teorem 2.17. m ve n den sadece biri çift olmak üzere,

$$\lambda^{1r}(P_m \times P_n)=\frac{3mn}{2}-m-n$$

dir (Ediz ve Çiftçi, 2022).

Teorem 2.18. m ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{2r}(P_m \times P_n)=mn-m-n$$

dir (Ediz ve Çiftçi, 2022).

Teorem 2.19. m tek ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{1r}(C_m \times C_n)=\frac{3mn}{2}$$

dir (Ediz ve Çiftçi, 2022).

Teorem 2.20. m ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{2r}(C_m \times C_n)=mn$$

dir (Ediz ve Çiftçi, 2022).

3. Bulgular

Şimdi hiperküp graflarında ve bir tam grafın yol, çevre ve bir tam grafla kartezyen çarpımından elde edilen graflarda *1*-düzenli ve *2*-düzenli ayrıt bağlantılılık incelenecektir.

Önerme 3.1.

$$\lambda^{(n-1)r}(Q_n)=2^{n-1}$$

dir.

İspat. Q_n grafının tanımından, Q_n nin $n-$düzenli bir graf ve $Q_n \cong Q_{n-1} \times K_2$ olduğunu biliyoruz. Q_n nin $(n-1)-$düzenli bağlantısız graflara ayrılması demek, uygun ayrıtlar silinerek Q_n nin bağlantısız iki Q_{n-1} grafına parçalanmasına denktir. Burada, 2^{n-1} uygun ayrıtın silinmesiyle istenen elde edilecektir.

Sonuç 3.2.

$$\lambda^{(n-2)r}(Q_n)=2^n$$

dir.

İspat. Önerme 3.1'in ispatında olduğu gibi Q_n den 2^{n-1} uygun ayrıtın silinmesi bize bağlantısız iki Q_{n-1} graflarını verecektir. O halde, her bir Q_{n-1} grafından 2^{n-2} uygun ayrıtın silinmesiyle Q_{n-2} grafları elde edilecektir. Böylece, Q_n den toplamda $2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}$ uygun ayrıtın silinmesiyle Q_n nin $(n-2)-$ düzenli ayrıt-bağlantılılığı elde edilir. Böylece,

$$\lambda^{(n-2)r}\left(Q_n\right)=2^n$$

elde edilmiş olur.

Teorem 3.3. m tek ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{1r}\left(K_m\times P_n\right)=\frac{m^2n}{2}-m$$

dir.

İspat. Kartezyen çarpımın tanımından, $K_m\times P_n$ grafının toplam ayrıt sayısının $m(n-1)+\frac{m(m-1)}{2}n$, $P_m\times P_n$ grafının ise $m(n-1)+n(m-1)$ ayrıtının olduğu bilinmektedir. $P_m\times P_n$ grafı referans alınarak ispat yapılabilir. Teorem 2.17'ten,

$$\lambda^{1r}\left(P_m\times P_n\right)=\frac{3mn}{2}-m-n$$

dir. $K_m\times P_n$ grafının, $P_m\times P_n$ grafından $\frac{m^2n}{2}-\frac{3mn}{2}+n$ fazla ayrıtı vardır. Dolayısıyla bu fazla ayrıtların silinmesiyle $P_m\times P_n$ grafı elde edilir. $P_m\times P_n$ grafından da uygun ayrıtların silinmesi ile $K_m\times P_n$ grafı için $1-$düzenli ayrıt-bağlantılılık elde edilmiş olur. Yani,

$$\begin{aligned}\lambda^{1r}\left(K_m\times P_n\right)&=\lambda^{1r}\left(P_m\times P_n\right)+\frac{m^2n}{2}-\frac{3mn}{2}+n\\&=\frac{3mn}{2}-m-n+\frac{m^2n}{2}-\frac{3mn}{2}+n\\&=\frac{m^2n}{2}-m\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.4. m ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{2r}\left(K_m\times P_n\right)=\frac{m^2n}{2}-\frac{mn}{2}-m$$

dir.

İspat. Teorem 3.3'ün ispatından görüleceği üzere $K_m \times P_n$ grafı, $P_m \times P_n$ grafından $\dfrac{m^2 n}{2} - \dfrac{3mn}{2} + n$ fazla ayrıta sahiptir. Yine Teorem 2.18'ten bilinmektedir ki

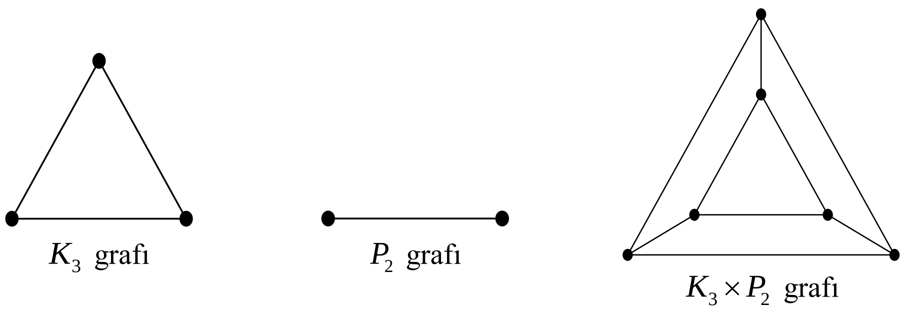
$$\lambda^{2r}\left(P_m \times P_n\right) = mn - m - n$$

dir. Dolayısıyla bu fazla ayrıtların silinmesiyle $P_m \times P_n$ grafı elde edilir. $P_m \times P_n$ grafından da uygun ayrıtların silinmesi ile $K_m \times P_n$ grafı için $2-$düzenli ayrıt-bağlantılılık elde edilmiş olur. Yani,

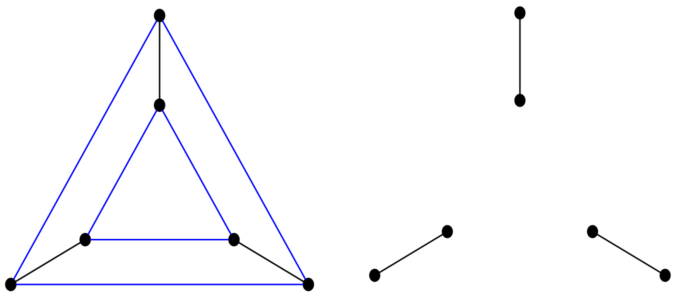
$$\begin{aligned}
\lambda^{2r}\left(K_m \times P_n\right) &= \lambda^{2r}\left(P_m \times P_n\right) + \frac{m^2 n}{2} - \frac{3mn}{2} + n \\
&= mn - m - n + \frac{m^2 n}{2} - \frac{3mn}{2} + n \\
&= \frac{m^2 n}{2} - \frac{mn}{2} - m
\end{aligned}$$

dir.

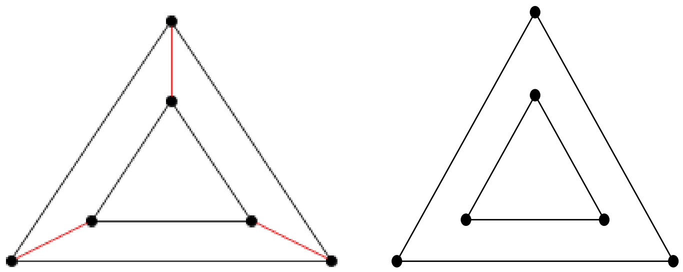
Örnek 3.5. K_3 tam grafı ile P_2 yol grafını alarak $K_3 \times P_2$ grafının *1*-düzenli ayrıt bağlantılılığını bulalım.



Şekil 1. K_3 ve P_2 graflarının kartezyen çarpımı



Şekil 2. $\lambda^{1r}\left(K_3 \times P_2\right)$'yi elde etmek için $K_3 \times P_2$'den silinmesi gereken ayrıtlar



Şekil 3. $\lambda^{2r}\left(K_3 \times P_2\right)$'yi elde etmek için $K_3 \times P_2$'den silinmesi gereken ayrıtlar

Şekil 2 ve Şekil 3 incelendiğinde, $K_3 \times P_2$ grafının *1*-düzenli ayrıt bağlantılılık sayısının 6, *2*-düzenli ayrıt bağlantılılık sayısının ise 3 olduğu görülür. Şimdi bu değerleri, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4'te verilen bağıntılar yardımıyla bulalım. O halde,

$$\lambda^{1r}\left(K_3 \times P_2\right) = \frac{3^2 \cdot 2}{2} - 3 = 6$$

ve

$$\lambda^{2r}\left(K_3 \times P_2\right) = \frac{3^2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = 3$$

Teorem 3.6. m tek ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{1r}\left(K_m \times C_n\right) = \frac{m^2 n}{2}$$

dir.

İspat. Kartezyen çarpımın tanımından, $K_m \times C_n$ grafının toplam ayrıt sayısının $mn + \frac{m(m-1)}{2}n$, $C_m \times C_n$ grafının ise $2mn$ ayrıtının olduğu biliniyor. $C_m \times C_n$ grafını referans alınarak ispat yapılabilir. Yine Teorem 2.19'den bilinmektedir ki

$$\lambda^{1r}\left(C_m \times C_n\right) = \frac{3mn}{2}$$

dir. $K_m \times C_n$ grafının, $C_m \times C_n$ grafından $\frac{mn(m-1)}{2} - mn$ fazla ayrıtı vardır. Dolayısıyla bu fazla ayrıtların silinmesiyle $C_m \times C_n$ grafı elde edilir. $C_m \times C_n$ grafından da uygun ayrıtların silinmesi ile $K_m \times C_n$ grafı için $1-$düzenli ayrıt-bağlantılılık elde edilmiş olur. Yani,

$$\begin{aligned}
\lambda^{1r}\left(K_m \times C_n\right) &= \lambda^{1r}\left(C_m \times C_n\right) + \frac{mn(m-1)}{2} - mn \\
&= \frac{3mn}{2} + \frac{mn(m-1)}{2} - mn \\
&= \frac{m^2 n}{2}
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.7. m ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{2r}\left(K_m \times C_n\right) = \frac{mn\left(m-1\right)}{2}$$

dir.

İspat. Kartezyen çarpımın tanımından, $K_m \times C_n$ grafının toplam ayrıt sayısının $mn + \frac{m\left(m-1\right)}{2}n$, $C_m \times C_n$ grafının ise $2mn$ ayrıtının olduğu bilinmektedir. $C_m \times C_n$ grafı referans alınarak ispat yapılabilir. Yine Teorem 2.20'dan bilinmektedir ki

$$\lambda^{2r}\left(C_m \times C_n\right) = mn$$

dir. $K_m \times C_n$ grafının, $C_m \times C_n$ grafından $\frac{mn\left(m-1\right)}{2} - mn$ fazla ayrıtı vardır. Dolayısıyla bu fazla ayrıtların silinmesiyle $C_m \times C_n$ grafı elde edilir. $C_m \times C_n$ grafından da uygun ayrıtların silinmesi ile $K_m \times C_n$ grafı için $2-$ düzenli ayrıt-bağlantılılık elde edilmiş olur. Yani,

$$\begin{aligned}\lambda^{2r}\left(K_m \times C_n\right) &= \lambda^{2r}\left(C_m \times C_n\right) + \frac{mn\left(m-1\right)}{2} - mn \\ &= mn + \frac{mn\left(m-1\right)}{2} - mn \\ &= \frac{mn\left(m-1\right)}{2}\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 3.8. m tek ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{1r}\left(K_m \times K_n\right) = \frac{mn}{2}\left(m+n-3\right)$$

dir.

İspat. Teorem 3.6'nın ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.9. m ve n çift olmak üzere,

$$\lambda^{2r}\left(K_m \times K_n\right) = \frac{mn}{2}\left(m+n-4\right)$$

dir.

İspat. Teorem 3.7'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

4. Sonuç

Şartlı bağlantılılık, ağların topolojik olarak daha iyi anlaşılmasında önemli rol oynar. Düzenli bağlantılılık yeni bir şartlı bağlantılılık türü olup bir grafın düzenli olarak parçalanması esasına dayanır. Bu özelliği ile bir çok mühendislik probleminde yer alan bir ağın simetrik parçalanması problemine büyük katkı sağlayacağı düşünülebilir. Bu çalışmada, hiperküp graflarında ve bir tam grafın yol, çevre ve bir tam grafla kartezyen çarpımından elde edilen graflarda *1*-düzenli ve *2*-düzenli ayrıt bağlantılılık değerleri hesaplanmıştır. Başka graf sınıflarının kartezyen çarpımlarında *1*-düzenli ve *2*-düzenli ayrıt bağlantılılık değerlerinin hesaplanması ileriki çalışmalar için düşünülebilir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynakça:

Balbuena C., Marcote X. The p-restricted edge-connectivity of Kneser graphs. Applied Mathematics and Computation 2019; 343: 258-267.

Deo N. Graph Theory with applications to engineering and computer science. Courier Dover Publications; 2017.

Diestel R. Grapht theory. Springer Science & Business Media. 2005.

Ediz S., Çiftçi İ. On k-regular edge connectivity of chemical graphs. Main Group Metal Chemistry 2022; 45(1): 106-110.

Fabrega J., Fiol MA. On the extraconnectivity of graphs. Discrete Mathematics 1996; 155: 49–57.

Guo L., Zhang M., Zhai S., Xu L. Relation of extra edge connectivity and component edge connectivity for regular Networks. International Journal of Foundations of Computer Science 2021; 32(2): 137–149.

Hao RX., Tian ZX., Xu JM. Relationship between conditional diagnosability and 2-extra connectivity of symmetric graphs. Theoretical Computer Science 2016; 627: 36-53.

Harary F. Conditional connectivity. Networks 1983; 13(3): 347–357.

Latifi S., Hegde M., Naraghipour M. Conditional connectivity measures for large multiprocessor systems. IEEE Transactions on Computers 1994; 43: 218–222.

Li H., Yang W. Bounding the size of the subgraph induced by m vertices and extra edge-connectivity of hypercubes. Discrete Applied Mathematics 2013; 161(16-17): 2753-2757.

Li P., Xu M. Fault-tolerant strong Menger (edge) connectivity and 3-extra edge-connectivity of balanced hypercubes. Theoretical Computer Science 2018; 707: 56-68.

Li X., Lin CK., Fan J., Jia X., Cheng B., Zhou J. Relationship between extra connectivity and component connectivity ın networks. The Computer Journal 2021; 64(1): 38–53.

Lin L., Huang Y., Wang X., Xu L. Restricted connectivity and good-neighbor diagnosability of split-star networks. Theoretical Computer Science 2020; 824: 81-91.

Liu X., Meng J. The k-restricted edge-connectivity of the data center network DCell. Applied Mathematics and Computation 2021; 396: 125941.

Lü H. On extra connectivity and extra edge-connectivity of balanced hypercubes. International Journal of Computer Mathematics 2017; 94(4): 813-820.

Lv M., Fan J., Zhou J., Cheng B., Jia X. The extra connectivity and extra diagnosability of regular interconnection networks. Theoretical Computer Science 2020; 809: 88-102.

Ma T., Wang J., Zhang M. The restricted edge-connectivity of kronecker product graphs. Parallel Processing Letters 2019; 29(03): 1950012.

Menger K. Zur allgemeinen Kurventheorie. Fundamenta Mathematicae 1927; 10: 96–115.

Ou J., Zhao W. On restricted edge connectivity of strong product graphs. Ars Comb. 2015; 123: 55-64.

Rahman MS. Basic graph theory. Cham: Springer. 2017.

Tarakmi H., Azanchilar H., Ghasemi M., Ghodratollah A. n-restricted edge connectivity of m-barrel fullerene graphs. Iranian Journal of Science and Technology 2021; 45(3): 997-1004.

Wallis WD. A beginner's guide to graph theory. Springer Science & Business Media. 2007.

Wang S., Wang Z., Wang M. The 2-extra connectivity and 2-extra diagnosability of bubble-sort star graph networks. The Computer Journal 2016; 59(12): 1839-1856.

Wei CC., Hsieh SY. H-restricted connectivity of locally twisted cubes. Discrete Applied Mathematics 2017; 217: 330-339.

West DB. Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice hall. 2001.

Yang W., Li H. On reliability of the folded hypercubes in terms of the extra edge-connectivity. Information Sciences 2014; 272: 238-243.

Zhang MM., Zhou J.X. On g-extra connectivity of folded hypercubes. Theoretical Computer Science 2015; 593: 146-153.

Zhao W., Ou J. On restricted edge-connectivity of lexicographic product graphs. International Journal of Computer Mathematics 2014; 91(8): 1618-1626.

Zhou JX. On g-extra connectivity of hypercube-like networks. Journal of Computer and System Sciences 2017; 88: 208-219.

Zhu Q., Ma F., Guo G., Wang D. A new approach to finding the extra connectivity of graphs. Discrete Applied Mathematics 2021; 294: 265-271.