Arşimedyen Kapulalar Ve Bir Uygulama

Salih ÇELEBİOĞLU[1]

Özet: Arşimedyen kapulalar özellikle son yıllarda uygulamalarda sıklıkla kullanılmaya başlamıştır. Bu çalışmada bu kapulaların temel özellikleri, iki parametreli ve ikiden çok değişkenli aileleri ile birlikte bu alanda ortaya çıkan yeni gelişmelere değinilmiştir. Ayrıca iki örnek uygulamaya yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Arşimedyen kapula, üretici.

Archimedean Copulas And An Applicatıon

Abstract: Especially in the last years, the Archimedean copulas take place more frequently in the applications. In this study, it is tried to introduce the Archimedean copulas with their basic properties, two parameter families and the multivariate families meanwhile some new developments are touched on. In addition, two applications for the student examination scores are given.

Keywords : Archimedean copula, generator.

Giriş

Kapulalar çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını bir değişkenli marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlayan fonksiyonlardır. Bir başka açıdan kapulalar, bir değişkenli marjinal dağılım fonksiyonları (0,1) aralığı üzerinde düzgün dağılım fonksiyonu olan çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır. Kapulalar, ölçekten bağımsız bağımlılık ölçülerini çalışmada, özellikle simülâsyon açısından çok değişkenli dağılım fonksiyonları inşa etmede önemlidir.

$\mathrm{I} = [0,1]$ birim aralığı üzerinde ikili bir işlem gibi davranan bir C Arşimedyen kapulası, bir başka deyişle Abel yarı grubu olan (**I**,C) ikilisi, özgün olarak ilk kez olasılı metrik uzaylarda üçgen eşitsizliğinin olasılı bir biçiminin geliştirilmesi çalışmalarında ortaya çıkmıştır[1].

Arşimedyen kapulalar şu nedenler yüzünden uygulamada geniş yer tutar[2] :

1. Elemanlarının kolayca inşa edilebilmesi,
2. Bu sınıfa ait ailelerin büyük değişkenlikler içermesi,
3. Elemanlarının sahip olduğu güzel cebirsel özellikler.

Yukarıda sözü edilen 2. özellik gereği, Arşimedyen kapulalar çok çeşitli bağımlılık yapılarını yansıtabildikleri için menkul kıymet borsalarında, sigorta matematiğinde, portföy paylaştırmada, ömür verilerinin analizlerinde,...kullanılmaktadır[3,4,5,6].

[1] Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 06503, Teknikokullar-ANKARA

Bu çalışmanın temel amacı Arşimedyen kapulaları tanıtmak ve uygulanışını örneklendirmektir.

Tanımlar, Temel Özellikler

Sonraki teoremden de görüleceği gibi, bir Arşimedyen kapula *üretici* adı verilen bir fonksiyon yardımıyla tanımlanır. Genest ve MacKay Arşimedyen kapulaların birçok özelliğinin ve bu kapulalar arasındaki ilişkilerin üreticilerin özellikleri aracılığıyla belirlendiğini gösterdiler[7].

Tanım 1. $\varphi : [0,1] \to [0,\infty]$, sürekli, kesin azalan ve $\varphi(1) = 0$ olan bir fonksiyon olsun. φ'nin *yarım tersi*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \le t \le \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \le t \le \infty \end{cases}$$

ile verilen fonksiyondur.

Teorem 1. $\varphi : I \to [0,\infty]$, sürekli, kesin azalan, $\varphi(1) = 0$ olan bir fonksiyon ve $\varphi^{[-1]}$, φ'nin yarım tersi olsun. $C : IxI \to I$,

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)); \quad u, v \in I \tag{2.2}$$

ile verilen C fonksiyonunun bir kapula olması için gerek ve yeter şart φ'nin konveks olmasıdır[2].

Teorem 1'de geçen C fonksiyonuna *Arşimedyen kapula* ve φ fonksiyonuna kapulanın *toplamsal üreticisi* denir. (2.2) bağıntısı $\psi(t) = e^{-\varphi(t)}, \quad t \in [0,1]$ olmak üzere

$$C(u,v) = \psi^{[-1]}(\psi(u)\psi(v)); \quad u, v \in I \tag{2.3}$$

biçiminde de yazılabilir ve ψ'ye C'nin *çarpımsal üreticisi* denir. Bu çalışmada yalnızca toplamsal üreticiler ele alınacak ve bu fonksiyonlardan üretici olarak söz edilecektir.

$\Omega = \{ \varphi : \varphi : I \to [0,\infty], \varphi(1) = 0, \varphi$ kesin azalan konveks fonksiyon $\}$ diyelim. $\varphi(0) = \infty$ olması durumunda $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$ olacağı, yani yarım tersin cebirsel terse eşit olacağı açıktır. $\varphi(0) = \infty$ iken φ'ye *tam* (strict) *üretici* ve C'ye de *tam Arşimedyen kapula* denir. İzleyen teorem Arşimedyen kapulaların bazı cebirsel özelliklerini ortaya koymaktadır[2].

Teorem 2. C, üreticisi φ olan bir Arşimedyen kapula olsun. O zaman aşağıdaki özellikler gerçeklenir :

1. C simetriktir; yani, $C(u,v) = C(v,u) \quad (\forall u, v \in I)$;
2. C birleşmelidir; yani, $C(C(u,v),w) = C(u, C(v,w)) \quad (\forall u, v, w \in I)$;
3. eğer c > 0 herhangi bir sabitse, $c\varphi$ de bir üreticidir.

Örnek 1. (a) $C(u,v) = uv$ bağımsızlık kapulası üreticisi $\varphi(t) = -\ln t$ olan tam bir Arşimedyen kapuladır. Teorem 2'deki 3. özellik gereği $\lambda > 0$ için $\varphi(t) = -\frac{1}{\lambda}\ln t$'nin de bağımsızlık kapulasının üreticisi olduğunu söyleyebiliriz.

(b) $W(u,v) = \max\{u + v - 1, \ 0\} \quad (u, v \in I)$ Fréchet-Hoeffding alt sınırı, üreticisi $\varphi(t) = 1 - t$ olan tam olmayan bir Arşimedyen kapuladır.

(c) $M(u,v) = \min\{u, v\}$ Fréchet-Hoeffding üst sınırı, bir Arşimedyen kapula değildir. Ancak bazı Arşimedyen aileler limit olarak bu üst sınırı kapsamaktadır (bkz., s. 94 [2]).

İzleyen teorem Arşimedyen kapulanın bir karakterizasyon teoremi olarak görülebilir.

Teorem 3. C, her $u \in (0,1)$ için $\delta_C(u) = C(u,u) < u$ olacak şekilde birleşmeli bir kapula olsun. O zaman C bir Arşimedyen kapuladır[2].

Teorem 4. Bir Arşimedyen kapulanın düzey eğrileri konvekstir[2].

Sonraki teorem Arşimedyen kapulanın tahmininde kullanılan $Z = C(U,V)$'nin dağılım fonksiyonunu vermektedir[8,2].

Teorem 5. C, üreticisi $\varphi \in \Omega$ olan bir Arşimedyen kapula olsun. $K_C(t), \{(u,v) \in I^2 : C(u,v) \le t\}$ kümesinin veya eşdeğer olarak $\{(u,v) \in I^2 : \varphi(u) + \varphi(v) \ge \varphi(t)\}$ kümesinin C ölçüsünü göstersin. O zaman herhangi bir $t \in I$ için

$$K_C(t) = t - \varphi(t) \big/ \varphi'(t^+)$$

(2.4)

dır; burada $\varphi'(t^+)$, $\varphi(t)$'nin t noktasındaki sağdan türevidir.

Bağımlılık ve birliktelik ölçüleri aralarında ilişkilidir. Ölçekçe değişmez kalan birliktelik ölçüleri arasında en çok bilinenler Kendall'ın to'su ve Spearman'ın ro'sudur. Bu iki ölçü uyumluluk olarak bilinen bağımlılığın bir biçimini ölçer ve bu ölçünün derecesi ortak dağılımın, dolayısıyla kapulanın parametresine/parametrelerine bağlıdır. Bazı durumlarda kapula ailelerinin üyelerinin kendi aralarında sıralanışı ya da parametrelerinin aldıkları değerlere göre sıralanışı bu ailelerin önceki cümlede geçen ölçüleri üzerine bilgi verici olur. İzleyen tanımda bu duruma bir başlangıç kavramı veriliyor.

Tanım 2. (a) C_1 ve C_2 iki kapula olmak üzere her u, v $\in$ I için $C_1(u,v) \le C_2(u,v)$ oluyorsa, C_1, C_2'den *küçüktür*, denir; bu durumu $C_1 \prec C_2$ ile gösterelim.

(b) $\{C_\theta\}$ bir kapula ailesi olsun. $\alpha \le \beta$ iken $C_1 \prec C_2$ oluyorsa, bu ailenin üyeleri *pozitif sıralı*, aksi halde *negatif sıralı* denir.

Aşağıdaki teorem üreticileri cinsinden iki Arşimedyen kapulanın sıralanışını veriyor[9,2].

Teorem 6. C_1 ve C_2, üreticileri sırasıyla φ_1, $\varphi_2 \in \Omega$ olan iki Arşimedyen kapula olsun. O zaman

$$C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]} \text{ alt toplamsal;}$$

(2.5)

yani, $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ ise,

$$f(x+y) \le f(x) + f(y); \quad x, y \in [0,\infty)$$

dır.

Örnek 2. C_1 ve C_2, sırasıyla θ_1 ve θ_2 parametrelerine sahip ve üreticileri $\varphi_k(t) = (1 - \ln t)^{\theta_k}$, $\theta_k \in (0,\infty)$; $k = 1,2$ olan

$$C_k(u,v) = \exp\left\{1 - [(1-\ln u)^{\theta_k} + (1-\ln v)^{\theta_k} - 1]^{1/\theta_k}\right\}, \quad u, v \in I$$

(2.6)

Arşimedyen kapulaları olsun. $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(t) = (1+t)^{\theta_1/\theta_2} - 1$ olup, bu fonksiyonun $\theta_1 \leq \theta_2$ için alt toplamsal olduğu kolayca görülebilir. Bu yüzden (2.6) ile verilen Arşimedyen kapulalar ailesi pozitif sıralıdır.

Arşimedyen kapulaların sıralanışını üreticilerin türevleriyle de ilişkilendirmek mümkündür. Bu anlamda sıralanışlar için [2,9,10]'a bakılabilir.

Aşağıdaki teorem Kendall'ın to'sunu Arşimedyen kapulanın üreticisi yardımıyla hesaplama imkânı vermektedir[8,2]:

Teorem 7. X ve Y, $\varphi \in \Omega$ ile üretilen Arşimedyen kapulaya sahip rastgele değişkenler olsun. X ve Y'ye ilişkin Kendall'ın to'sunun yığın biçimi τ_C,

$$\tau_C = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\,dt$$

(2.6)

ile verilir.

İki Parametreli Arşimedyen Aileler

Bilindiği gibi parametreler dağılımı belirginleştiren değerlerdir. Birden fazla sayıda parametre daha ayrıntılı bir şekilde ve geniş dağılım ailelerini özellikle bağımlılık açısından belirginleştirmekle birlikte, çok fazla sayıda parametrenin bulunması çok değişkenli dağılımlara benzer biçimde yorumlamayı güçleştireceğinden, çoğunlukla parametre sayısında tutumluluk yeğlenir. İzleyen teoremde bir parametreli Arşimedyen ailelerden iki parametreli aileleri elde etmenin iki yolu verilmektedir[9,2]:

Teorem 8. $\varphi \in \Omega$ ve $\alpha, \beta \in \nabla^+$ olsun. Ayrıca

$$\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^\alpha) \quad \text{ve} \quad \varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^\beta$$

(3.1)

olarak tanımlansın. O zaman

1. $\beta \geq 1 \Rightarrow \varphi_{1,\beta} \in \Omega$;
2. $\alpha \in (0,1] \Rightarrow \varphi_{\alpha,1} \in \Omega$;

3.Eğer φ iki kez diferansiyellenebilir ve $t\varphi'(t)$, $(0,1)$ üzerinde azalmayan ise, her $\alpha > 0$ için $\varphi_{\alpha,1} \in \Omega$'dır.

Örnek 3. (a) $\varphi(t) = 1/t - 1$ üreticisi $C(u,v) = uv/(u+v-uv)$ Arşimedyen ailesini üretirken, Teorem 8'in 3. ve 1. şıkları gereği $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = [\varphi(t^\alpha)]^\beta = (t^{-\alpha}-1)^\beta \ (\alpha > 0, \beta \geq 1)$ üreticisi

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \{[(u^{-\alpha}-1)^\beta + (v^{-\alpha}-1)^\beta]^{1/\beta} + 1\}^{-1/\alpha}; \quad u, v \in I$$

(3.2)

Arşimedyen ailesini üretir. Bu aile $C_{0,1} = \Pi$'yi, $C_{0,\infty}$ ile Gumbel ailesini ve $C_{\alpha,\infty} = M$ ve Fréchet-Hoeffding üst sınırını içerir. Benzer şekilde $\alpha = 1/\beta$, $\beta \geq 1$ için Clayton (veya diğer adıyla Cook-Johnson) ailesi bu iki parametreli aile tarafından kapsanır. Bu aile her iki parametresine göre pozitif sıralıdır; yani, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ve $\beta_1 \leq \beta_2$ için $C_{\alpha_1,\beta_1} \pi C_{\alpha_2,\beta_2}$'dir. Bu aile iki değişkenli Weibull ailelerinde sağkalım kapulası olarak kullanılmaktadır[11,2].

(b) $\varphi(t) = -\ln t$, Örnek 1(a)'da görüldüğü gibi $C(u,v) = uv$ bağımsızlık kapulasının üreticisidir. (a) şıkkındaki $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = [\varphi(t^{\alpha})]^{\beta}$ $(\alpha > 0, \beta \geq 1)$ bağıntısıyla

$$C_{\beta}(u,v) = \exp\{-[(-\ln u)^{\beta} + (-\ln v)^{\beta}]^{1/\beta}\}; \quad u, v \in I$$

kapulası üretilir. Ancak bu örnekte ilginç olan bir durum α parametresinin ortadan kalkmasıdır.

İki parametreli Arşimedyen kapulalarla ilgili örnekler [2,10,12]'de görülebilir.

İki parametreli Arşimedyen kapulalar arasında $C(u,v) = P(u,v)/Q(u,v)$ şeklinde aralarında asal iki polinomun oranı olarak ifade edilebilenler de vardır. Bu tür tam Arşimedyen aileler Ali-Mikhail-Haq adlı özel bir ailenin elemanlarından oluşmaktadır[2].

Çok Değişkenli Arşimedyen Kapulalar

İki değişkenli Arşimedyen ailelerin bir kısmı birleşmelilik özelliğinin sonucu olarak n ≥ 3 boyutuna genişletilebilir. Bu genişletmenin bir yolu iki değişkenli Arşimedyen aile üreticilerinin tam monoton fonksiyon olmalarıdır.

Teorem 9. $\varphi \in \Omega$ olsun. $C : I^n \to I$,

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_n)); \quad u_i \in I \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun bir n-kapula (n ≥ 2) olması için gerek ve yeter şart, φ^{-1}'nin [0,∞) üzerinde tam monoton, yani $k = 0,1,2,...$ için

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) \geq 0, \quad t \in [0, \infty) \tag{4.2}$$

olmasıdır[1,2].

Arşimedyen n-kapulaları üretmenin ikinci bir yolu, dağılım fonksiyonlarının ters Laplace dönüştürmelerini üretici olarak kullanmaktır. Bir diğer yol ise, üreticileri m ≥ 2 için [0,∞) üzerinde m-monoton olan, yani (4.2)'de geçen özelliği $k = 0,1,2,...,m$ için sağlayan fonksiyonlardan seçmektir. Bu durumda boyutu $2 \leq n \leq m$ olan Arşimedyen n-kapulalar oluşturmak mümkündür[2,10].

Değiştirilebilir (exchangeable) dağılımlar üretmede kullanılan Arşimedyen n-kapulaları üretmek kolay olmakla birlikte, bu kapulaların bazı sınırlamaları vardır. Bunlardan biri Arşimedyen n-kapulaların k boyutlu marjinallerinin aynı olmasıdır. Bir diğer kısıtlama da bu ailelerde bağımlılık yapısının çoğunlukla bir veya iki parametre ile sınırlanmış olmasıdır[2]. Ancak sonraki kesimde de görüleceği gibi çeşitli yöntemlerle Arşimedyen kapuladaki parametre sayısını artırmak mümkündür.

Örnek 4. Üreticisi ve karşı gelen kapulası sırasıyla

$$\varphi_{\theta}(t) = \ln\frac{1-\theta(1-t)}{t}; \qquad C_{\theta}(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}; \quad \theta \in [-1,1)$$

olan Ali-Mikhail-Haq ailesi pozitif sıralıdır. $\varphi_{\theta}^{-1}(t)$'nin $t \in [0,\infty)$ için tam monoton olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla Teorem 9 gereğince bu aileden

$$C_\theta(u_1,...,u_n) = \frac{(1-\theta)\prod_{i=1}^{n}\frac{u_i}{1-\theta(1-u_i)}}{1-\theta\prod_{i=1}^{n}\frac{u_i}{1-\theta(1-u_i)}}; \quad u_i \in [0,1], \quad \theta \in [-1,1)$$

biçiminde Arşimedyen n-kapulalarını elde ederiz.

Arşimedyen Kapulalarda Yeni Gelişmeler

Kapula alanındaki diğer çalışmalarda olduğu gibi, Arşimedyen kapulalarla ilgili çalışmalar da çeşitlenerek devam etmektedir.

Çelebioğlu, Arşimedyen kapula üreticilerini kullanarak iki ve çok değişkenli yeni kapulalar üretmeyi denedi[13, 14, 15]. Capéraà ve arkadaşları, Arşimedyen kapulaları bu aileyi bir alt aile olarak kabul eden Archimax kapulalara genişlettiler[16]. Joe ve Ma, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanmış sağkalım kapulalarından çok boyutlu Arşimedyen kapulaların elde edilebileceğini gösterdiler[17]. Sungur, 1999 yılında elde ettiği "kesildiğinde değişmeyen bağımlılık yapısı"na sahip iki değişkenli kapulaları daha büyük boyutlu kapulalara genişlettiği çalışmasında, bağımsızlık kapulası dışında bu özelliği sağlayan tek ailenin Cook-Johnson ailesi olduğunu belirtiyor ve Arşimedyen kapulalara yeni bir parametre ilâvesinin yeni bir yöntemini veriyor[18]. Ayrıca daha önce Genest ve arkadaşları, Clayton, Gumbel ve Frank ailelerini bir alt aile olarak kapsayan üç parametreli bir Arşimedyen aile verdiler[19]. Cuculescu ve Teodorescu, Archimax kapulalar ve çok boyutlu dağılımların tek modlulukla ilişkisini araştırdılar[20].

Arşimedyen kapulaların kullanıldığı uygulamalar da her geçen gün artmaktadır. Wang ve Wells, Arşimedyen kapulaların ürettiği durdurulmuş veriler için iki değişkenli sağkalım modellerine ilişkin seçim modelleri üzerinde durdular[6]. Hennessy ve Lapan, portföy paylaştırmada Arşimedyen kapulaların birinci ve ikinci dereceden baskın değişimlerde nasıl kullanılabileceğini örneklendirdiler ve Arşimedyen kapulalarla üretilen çok değişkenli dağılımların güçlü ayrılabilir oluşu yüzünden portföy paylaştırmaya çok uygun düştüğünü belirttiler[4]. Juri ve Wüthrich, kuyruk bağımlılık yapısını ele aldıkları Arşimedyen kapulalardan Clayton ailesinin genelleştirilmiş Pareto dağılımı rolü oynadığını ve bu yüzden Arşimedyen kapulalar içinde menkul kıymet, borsa verilerine çok uygun düştüğünü verdikleri bir örnek üzerinde gösterdiler[3]. Gray ve Li, kümelenmiş bozulma/ömür süreleri verilerine ilişkin marjinal orantılı tehlike analizinde ağırlık fonksiyonlarının en iyi şekilde seçiminin lineer modeller kullanılarak Arşimedyen kapulalarla yapılabileceğini ve bağımlılığın orta düzeyde olduğunda bu yolla bulunan çözümlerin etkin olacağını gördüler[5]. Genest ve arkadaşları, sözleşmeler arasındaki bağımlılığın karma dağılımlar biçiminde ortaya çıktığı bir veya çok sınıflı bireysel risk modellerinde, toplam sigorta poliçesi üstünden yapılacak ödemelerin tutarına ilişkin dağılıma yaklaşımda birleşik Poisson dağılımını kullandıkları çalışmada iki ve çok değişkenli Arşimedyen kapulalardan yararlandılar[21].

Uygulama

Bu kesimde, Gazi Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği ve İstatistik Bölümlerinde okuyan öğrencilerin sırasıyla MAT-209 Olasılık ve İstatistik(199 öğrenci) ve İST-408 Rassal Süreçlere Giriş(129 öğrenci) derslerinde aldıkları Ara sınav ve Final Sınavı notları arasındaki bağımlılık yapısı Arşimedyen kapulalarla modellenmeye çalışıldı.

Tablo 1. MAT-209 Olasılık ve İstatistik Ara ve Final Sınavı Notları

A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F
50	23	28	12	32	12	41	35	47	15	38	48	73	64	35	17	78	50	52	85
32	17	44	49	66	57	95	85	25	18	48	35	69	57	44	55	44	11	52	79
56	17	64	58	60	60	73	40	74	51	86	59	100	56	28	45	81	75	80	86
100	87	58	62	91	53	73	15	89	54	71	26	28	14	64	66	35	30	95	68
78	29	39	15	77	71	70	60	96	81	100	81	70	47	62	15	99	50	78	100
100	98	94	81	81	74	84	43	48	13	68	55	78	70	72	73	72	54	68	30
94	92	80	65	60	61	61	81	67	56	80	70	63	63	48	68	94	66	84	67
39	43	94	87	55	41	84	84	1	14	87	50	44	34	76	61	63	44	94	94
88	62	67	39	82	74	62	63	87	89	62	67	98	67	100	79	71	35	63	31
90	36	74	61	53	29	66	27	88	59	80	89	57	64	65	58	59	43	65	38
59	52	80	70	80	57	98	83	48	18	63	50	54	66	58	47	71	66	80	78
48	67	53	63	70	80	52	43	62	60	62	81	98	69	49	50	66	71	61	60
40	50	48	43	57	56	64	63	47	60	25	36	76	78	44	83	67	75	68	82
88	82	78	70	84	83	52	39	21	47	27	11	15	2	76	24	88	4	73	95
72	25	62	44	45	48	44	32	66	77	79	69	40	44	43	36	54	57	52	45
47	21	50	38	74	66	53	74	32	11	73	10	53	62	70	61	43	10	88	64
63	22	65	1	55	23	55	61	37	4	63	58	38	1	59	54	46	45	56	64
46	27	40	27	33	43	46	45	38	29	29	73	36	33	52	32	45	15	47	9
21	1	53	82	55	44	50	27	30	43	10	20	30	22	45	45	46	49	76	57
68	43																		

Tablo 2. İST-408 Rassal Süreçlere Giriş Ara ve Final Sınavı Notları

A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F
39	21	51	54	53	13	61	46	32	14	47	50	55	42	69	60	48	32	47	34
58	60	45	16	45	27	54	29	36	65	38	30	22	16	63	47	53	54	77	55
75	70	40	24	30	23	51	46	68	73	63	75	74	66	39	16	63	52	42	42
60	52	46	39	66	34	47	44	48	56	26	31	63	73	75	70	43	47	37	14
36	19	60	38	64	69	65	43	54	40	48	57	36	32	36	23	41	60	46	71
65	81	67	87	45	52	72	58	40	10	69	74	48	50	45	62	42	59	51	53
66	60	60	47	22	35	55	60	41	35	69	51	51	59	57	50	68	39	35	58
45	19	28	46	19	19	20	36	13	43	40	43	30	40	13	35	25	30	38	58
25	22	36	51	15	37	37	41	35	53	21	32	10	5	45	56	38	49	45	50
31	42	34	53	27	47	40	46	58	46	38	25	40	37	30	53	10	6	35	30
33	38	38	44	32	27	36	42	31	40	8	13	17	41	28	45	21	1	20	24
34	52	20	29	10	29	43	43	41	27	35	55	31	39	25	32	30	21	44	21
56	24	49	53	81	46	41	40	25	60	35	40	73	52	17	50	23	21		

Bu amaçla, Clayton (Cook-Johnson) ve Gumbel Arşimedyen aileleri için beklenen ve gözlenen frekanslar ile hesaplanmış ve tablo χ^2 değerleri aşağıda verilmiştir. Tahmin ve istatistiksel sonuç çıkarmada [22]'den yararlanılmıştır. Birim sayısı çok daha büyük olsaydı, [23]'de önerilen yöntemden yararlanılabilirdi. Clayton ve Gumbel Arşimedyen aileleri sırasıyla

$$C_\theta(u,v) = \max\left\{\left[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right]^{-1/\theta}, 0\right\} \quad \theta \in [-1,\infty) - \{0\},$$

$$C_\theta(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\} \quad \theta \in [1,\infty)$$

ile verilir[2]. Çok sayıda diğer Arşimedyen aile için [2]'nin 94-97. sayfalarına ve [10]'a bakılabilir.

Tablo 3. Olasılık ve İstatistik Dersi İçin Clayton Ailesi (θ = 1,747)
Gözlenen (G) / Beklenen (B) Frekanslar

		Final Sınavı									
		0 - 19		20 – 39		40 – 59		60 - 79		80 - 100	
		G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
Ara	0 - 19	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0
	20 - 39	13	12	6	10	9	3	1	1	0	0
Sınav	40 - 59	8	4	15	24	21	24	12	10	3	3
	60 - 79	4	0	13	9	20	26	25	22	9	10
	80 -100	1	0	1	2	8	11	12	15	14	9

$\chi^2_{\mathrm{hes}} = 29{,}51$ $\chi^2_{\mathrm{tab};13;0{,}95} = 22{,}36$ $\chi^2_{\mathrm{tab};13;0{,}99} = 27{,}69$ Sd = 25 – 1 – 11 = 13

Tablo 4. Olasılık ve İstatistik Dersi İçin Gumbel Ailesi (θ = 1,874)
Gözlenen (G) / Beklenen (B) Frekanslar

		Final Sınavı									
		0 - 19		20 – 39		40 - 59		60 - 79		80 - 100	
		G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
	0 - 19	4	2	0	2	0	1	0	0	0	0
Ara	20 - 39	13	7	6	10	9	7	1	2	0	0
	40 - 59	8	8	15	21	21	24	12	9	3	1
Sınav	60 - 79	4	3	13	12	20	26	25	22	9	5
	80 -100	1	0	1	2	8	6	12	13	14	16

$\chi^2_{\mathrm{hes}} = 18{,}91$ $\chi^2_{\mathrm{tab};13;0{,}95} = 22{,}36$ $\chi^2_{\mathrm{tab};13;0{,}99} = 27{,}69$

Tablo 5. Rassal Süreçlere Giriş Dersi İçin Clayton Ailesi (θ = 1,604)
Gözlenen (G) / Beklenen (B) Frekanslar

		Final Sınavı									
		0 - 19		20 – 39		40 - 59		60 – 79		80 – 100	
		G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
	0 - 19	4	8	6	8	3	0	0	0	0	0
Ara	20 - 39	7	4	23	15	19	13	1	3	0	0
	40 - 59	3	0	12	24	26	28	2	10	0	1
Sınav	60 - 79	0	0	2	3	10	10	8	5	2	1
	80 -100	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

$\chi^2_{\mathrm{hes}} = 28{,}50$ $\chi^2_{\mathrm{tab};8;0{,}95} = 15{,}51$ $\chi^2_{\mathrm{tab};8;0{,}99} = 20{,}09$ Sd = 25 – 1 – 16 = 8

Tablo 6. Rassal Süreçlere Giriş Dersi İçin Gumbel Ailesi (θ = 1,802)
Gözlenen (G) / Beklenen (B) Frekanslar

		Final Sınavı									
		0 - 19		20 – 39		40 - 59		60 – 79		80 - 100	
		G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
Ara	0 - 19	4	3	6	6	3	2	0	0	0	0
	20 - 39	7	6	23	22	19	15	1	2	0	0
Sınav	40 - 59	3	3	12	16	26	27	2	7	0	1
	60 - 79	0	0	2	2	10	7	8	8	2	1
	80 -100	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1

$$\chi^2_{\text{hes}} = 7{,}85 \quad \chi^2_{\text{tab};8;0{,}95} = 15{,}51 \quad \chi^2_{\text{tab};8;0{,}99} = 20{,}09$$

Ayrıca her iki dersin ara ve final sınav notlarının marjinal dağılımlarına ilişkin aşağıdaki değerler elde edilmiştir: X_A : Arasınav Notu; X_F : Final Notu olmak üzere

$X_{A,\ \text{Olaist}} \approx N\ (\ 61{,}30;\ (20{,}83)^2\ )$

$\chi^2_{\text{hes}} = 9{,}98;$ p değeri = 0,696
(20 sınıf)

$X_{F,\ \text{Olaist}} \approx N\ (\ 50{,}45;\ (24{,}34)^2\ )$

$\chi^2_{\text{hes}} = 15{,}71;$ p değeri = 0,544
(23 sınıf)

$X_{A,\ \text{Rassal}} \approx N\ (\ 42{,}64;\ (16{,}80)^2\ )$

$\chi^2_{\text{hes}} = 7{,}80;$ p değeri = 0,708
(22 sınıf)

$X_{F,\ \text{Rassal}} \approx N\ (\ 42{,}19;\ (17{,}13)^2\ )$

$\chi^2_{\text{hes}} = 6{,}09;$ p değeri = 0,808
(22 sınıf)

Analiz sonuçlarından da görüldüğü gibi, Gumbel ailesi her iki derste de Clayton ailesinden daha iyi tahminler vermektedir.

Kaynaklar

1. Schweizer, B., Sklar, A., **Probabilistic Metric Spaces**, North Holland, New York (1983).
2. Nelsen,R.B., **An Introduction to Copulas**, Springer, New York (1999).
3. Juri, A., Wüthrich,M.V., **Copula convergence theorems for tail events**, Insurance Math. Econ., 30(3), 405-420 (2002).
4. Hennessy, D.A., Lapan, D.E., **The use of Archimedean copulas to model portfolio allocations**, Math Finance, 12(2), 143-155 (2002).
5. Gray, R.J.,Li, Y., **Optimal weight functions for marginal proportional hazards analysis of clustered failure time data**, Lifetime Dat Anal, 8(1), 5-19 (2002).
6. Wang, W.J., Wells, M.T., **Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data**, J. Amer. Statist. Assoc., 95(449), 62-72 (2000).
7. Genest, C., MacKay, J., **Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionelles dont les marges sont données**, Canad. J. Statist., 14, 145-159 (1986).

8. Genest, C., MacKay, J., **The joy of copulas: bivariate distributions with uniform marginals**, Amer. Statist., 40, 280-285 (1986).
9. Nelsen, R.B., **Dependence and order in Archimedean copulas**, J. Multivariate Anal., 60(1), 111-122 (1997).
10. Joe, H., **Multivariate Models and Dependence Concepts**, Chapman and Hall, London (1997).
11. Lu, J.C., Bhattacharyya, G.K., **Some new constructions of bivariate Weibull models**, Ann. Inst. Stat. Math., 42, 543- 559 (1990).
12. Joe, H., **Parametric families of multivariate distributions with given margins**, J. Multivariate Anal., 46, 262-282 (1993).
13. Çelebioğlu, S., **Archimedean copulas generated by the analytical means of generators**, Araştırma Sempozyumu '97, Ankara 24-26 Kasım 1997, Araştırma Sempozyumu '97 Bildirileri, 32-36,Ankara (1997).
14. Çelebioğlu, S., **On a one-parametric family of copulas**, İstatistik Günleri Sempozyumu, Adana 25-26 Mayıs 1998, İstatistik Günleri Sempozyumu Bildiriler Kitabı, 1-4, Ankara (1998).
15. Çelebioğlu, S., **Toplamsal Arşimedyen üreticilerden türetilen yeni bir kapulalar ailesi**, İstatistik Konferansı, Ankara 26-27 Ekim 1998, İstatistik Konferansı Bildiriler Kitabı, 31-35, Ankara (1999).
16. Capéraà, P., Fougères, A.-L., Genest, C., **Bivariate distributions with given extreme value attractor**, J. Multivariate Anal., 72, 30-49 (2000).
17. Joe, H., Ma, C., **Multivariate survival functions with a min-stable property**, J. Multivariate Anal., 75, 13-35 (2000).
18. Sungur, E.A., **Some results on truncation dependence invariant class of copulas**, Commun. Statist. Theory-Meth., 31(8), 1399-1422 (2002).
19. Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.-P., **Comment on the paper by E.W. Frees and E.A. Valdez (1998)**, North American Actuarial Journal, 2, 143-149 (1998).
20. Cuculescu, I., Theodorescu, R., **Extreme value attractors for star unimodal copulas**, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 334, 689-692 (2002).
21. Genest, C., Marceau, E., Mesfioui, M., **Compound Poisson approximations for individual models with dependent risks**, Insurance Math. Econ., 32(1), 73-91, FEB 19 (2003).
22. Genest, C., Rivest, L.-P., **Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas**, J. Amer. Statist. Assoc., 88, 1034-1043 (1993).
23. Sungur, E.A., Yang, Y., **Diagonal copulas of Archimedean class**, Commun. Statist. Theory-Meth., 25(7), 1659-1676 (1996).