

PAPER DETAILS

TITLE: Lise Matematik Öğretmenlerinin Türevin Tanımına ve Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Pedagojik Alan Bilgileri

AUTHORS: Murat Duran, Abdullah Kaplan

PAGES: 795-831

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/286845>

**Lise Matematik Öğretmenlerinin Türevin Tanımına ve
Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Pedagojik Alan Bilgileri***

**High School Teachers' Pedagogical Content Knowledge on Definition of
Derivative, and Relationship Between Derivative and Continuity**

DOI=[10.17556/jef.68600](https://doi.org/10.17556/jef.68600)

Murat DURAN**, Abdullah KAPLAN***

Özet

Bu araştırmanın amacı lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına, türevin tanımının görselleştirilmesine ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgilerini konu alanı bilgisi bağlamında incelemektir. Öğretmenlerin konu alanı bilgileri; türevi tanımlama ve örneklendirme, türevin tanımını görselleştirme ve türev-süreklilik arasındaki ilişkiyi açıklama şeklinde üç başlık altında incelenmiştir. Nitel araştırma modellerinden özel durum çalışmasına göre desenlenen bu araştırma 2015-2016 öğretim yılı güz döneminde Karadeniz Bölgesi'ndeki bir şehirde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın katılımcıları ikisi fen edebiyat fakültesi mezunu, diğer ikisi ise eğitim fakültesi mezunu olmak üzere dört lise matematik öğretmenidir. Araştırmanın veri toplama aracı araştırmacılar tarafından geliştirilmiş yarı yapılandırılmış görüşme formudur. Araştırmanın verileri içerik analizi tekniğiyle incelenmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına yönelik gerekli ancak yetersiz tanım yaptıkları belirlenmiştir. Öğretmenlerin türev kavramına verdikleri örneklerin anlık değişim, değişim hızı ve değişim oranı gibi prototip örneklerle sınırlandığı görülmüştür. Öğretmenlerden ikisinin türev-süreklilik ilişkisine yönelik yeterli açıklamalarda bulundukları tespit edilirken diğer ikisinin bu ilişkiyi gerekli ancak yetersiz şekilde açıkladıkları sonucuna varılmıştır.

Anahtar Sözcük: Türev, Pedagojik Alan Bilgisi, Konu Alanı Bilgisi

Abstract

The purpose of this research is to investigate high school mathematics teachers' pedagogical content knowledge in the context of subject matter knowledge

* Bu araştırmaya birinci yazarın doktora tezi pilot çalışmasında kullanılan verilerin bir bölümünden üretilmiştir. Araştırmada katkısı olan Dr. Muhammet DORUK'a teşekkür ederiz.

** Doktora Öğrencisi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim ABD, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Erzurum, Türkiye, denizyildizi2805@hotmail.com

*** Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı, Erzurum, Türkiye, akaplan@atauni.edu.tr

on the definition of derivative, the visualization of the definition of derivative, and the relationship between derivative and continuity. The subject matter knowledges of teachers are examined in the form of defining derivatives and giving examples to derivatives from everyday life, visualizing the definition of derivatives and explaining the relationship between derivatives and continuity. The case study design of the qualitative research models is used in this research. The research is carried out in a city of the Black Sea Region of Turkey during the fall semester of 2015-2016 academic terms. The participants of the research are four mathematics teachers two graduated from the faculty of science-letters and the other two graduated from the faculty of education. The data collection tool is a semi-structural interview protocol developed by the researchers. The research data are analyzed by content analysis. According to the results of the research, high school mathematics teachers made necessary but insufficient definitions for the definition of the derivative. The teachers have presented prototype examples such as instant change, rate of change and exchange ratio in relation to the derivative. Two of the teachers were found to have made sufficient explanations for the relationship between the derivative and continuity while the other two explained necessary but inadequately manner for the same relationship.

Keywords: Derivatives, Pedagogical Content Knowledge, Subject Matter Knowledge

Giriş

Küreselleşen dünyada bilim ve teknoloji alanındaki gelişmeler güncel bilgi ve becerilerle donatılmış, çağın şartlarına ayak uyduran nitelikli bireylerin yetişmesini gerekli kılmıştır (Konyalıoğlu, 2003). Nitelikli bireylerin yetiştirilmesi ancak nitelikli öğretmenler eliyle gerçekleştirilebilir (Batur & Balcı, 2013). Öğretmenlerin daha kaliteli yetişebilmesi, öğrenilmesi gereken bilgi ve becerilerin öğretmen adaylarına kazandırılmasıyla mümkün olmaktadır (Erdem, 2005). Etkili bir öğretime yönelik öğretmen yeterlikleri incelendiğinde bu yeterliklerin başında konu alanı bilgisi gelir (Alev & Karal, 2013). Ayrıca bir kuralı ya da kavramı öğrenme sürecinde bireysel ihtiyaçları da dikkate alarak öğretim gerçekleştirme konusunda pedagoji bilgisi gibi daha farklı bilgi çeşitlerine de ihtiyaç duyulmaktadır (Shulman, 1986). Günümüzde alan bilgisi ile pedagoji bilgisinin bütünleşmesi pedagojik alan bilgisi kavramının önemini arttırmıştır (Gess Newsome, 1999). İlk olarak Shulman (1986) tarafından alanyazına kazandırılan pedagojik alan bilgisi, kalıcı öğrenmeler gerçekleştirmek amacıyla kavramları en doğru temsil eden benzeşimlerin, görsellerin, açıklamaların ve örneklerin kullanılmasını sağlayan bilgi türü olarak tanımlanmıştır.

Shulman (1987) “öğretmenliğin bilgi temeli” olarak isimlendirdiği modelinde “öğrenciyi anlama” bilgisi ve “öğretim strateji, yöntem ve teknik” bilgisini pedagojik alan bilgisiyle beraber incelerken “konu alanı” bilgisini farklı bir kategoride incelemiştir. Konu alanı bilgisini pedagojik alan bilgisinden farklı değerlendiren Grossman (1990) ise “pedagojik alan bilgisi” boyutunu merkeze alarak bu boyutu “içerik bilgisi”, “konu alanı bilgisi”, “genel pedagojik bilgi” boyutlarıyla ilişkili şekilde göstermiştir. Marks (1990) ise modelinde konu alanı bilgisiyle pedagojik alan bilgisinin özdeşleşebileceğini ve bu iki kavram arasına engel koymanın doğru olmadığını ifade etmiştir. Veal, Tippins ve Bell (1998)’e göre pedagojik alan bilgisinde başarılı olmanın ilk koşulu iyi düzeyde konu alanı bilgisine sahip olmaktır.

Alanyazındaki araştırmalar, pedagojik alan bilgisiyle konu alanı bilgisinin birbiriyle ilişkili olduğunu (Gökkurt, Şahin & Soylu, 2012; Halim & Meerah, 2002; Türnüklü, 2005) ve konu alanı bilgisinin pedagojik alan bilgisi bileşenleri dışında tutulamayacağını göstermiştir (Bennett & Turner-Bisset, 1993). Konu alanı bilgisi, öğretmenin herhangi bir konudaki tanım, kural, örnek, görsel ve başlık hakkında bilgi sahibi olmasını ifade eder (Canbazoğlu, Demirelli & Kavak, 2010). Öğretim sürecinde belirlenen etkinliklerin konuya uygunluğu, öğrencilere üretken soruların sorulması, öğrenci anlamalarını değerlendirme gibi öğretim etkinlikleri öğretmenin konu alanı bilgisiyle ilgilidir (Ball & McDiarmid, 1990). Konu alanı bilgisine yeterince sahip öğretmenler daha güvenilir ders işlemekte, öğretime yönelik çeşitli stratejilere ihtiyaç duymakta ve sorulara tatmin edici cevaplar verip dersi daha zevkli kılmaktadır (Cohen, McLaughlin & Talbert, 1993). Buna karşın yetersiz konu alan bilgisine sahip öğretmenlerin öğrencilere aktardıkları bilgiler yüzeysel kalırken öğrencilerdeki hataların ve kavram yanlışlarının düzeltilmesi de zorlaşmaktadır (Käpyla, Heikkinen & Asunta, 2009).

Matematik öğretmenlerinin konu alanı bilgilerine yönelik yapılan çalışmalarda öğretmenlerin, matematiğin çeşitli konularında yetersiz ve hatalı bilgilere sahip oldukları, ayrıca ilgili kavramları öğrencilere yanlış aktardıkları görülmüştür (Hawkins, 2012; Vermette & Gattuso, 2014; Yılmaz, 2016; Yusof & Zakaria, 2010). Öğretmenler ve öğretmen adayları konu alanı bilgilerini daha çok işlemsel anlamda

kullandıklarından kavramsal anlamda sorun yaşamaktadır (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1978). Bu nedenle bu araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türev konusuna yönelik konu alanı bilgileri kavramsal anlamda incelenmiştir. Bir kavramın zihinlerde yanlışlığa neden olmaması için öğretim yapacak bireyin ilgili kavrama önce kendisinin hakim olması gerekir (Çakmak, Konyalıoğlu & Işık, 2014). Ayrıca lisede türev konusunun sağlam bir temele dayandırılarak öğrencilere kavramsal anlamda öğretilmesi gerekmektedir (James, 1995). Çünkü lise düzeyinde kavramsal olarak iyi öğrenilemeyen analiz konuları üniversitenin ilk sınıfındaki öğrenciler için engel olabilmektedir (Burton, 1989). Bundan dolayı, mevcut çalışmada öğretmenlerin kavramı doğru anlaşılacak şekilde tanımlama, kavrama günlük hayattan örnekler verme, kavramın tanımını görselleştirme, görselleştirme sürecini doğru açıklama ve kavramlar arası ilişkileri doğru ifade etme gibi davranışları gerçekleştirme durumları dikkate alınmıştır. Alanyazında türeve yönelik çalışmalarda türevin cebirsel tanımı (Zandieh, 1997), türev-limit ilişkisi (Bingölbalı, 2013), fonksiyonun türevi ile sürekliliğini anlama (Artigue, 1991; Viveros & Sacristan, 2002), değişim oranı kavramını açıklama (Bezuindenhout, 1998; Orton, 1983) gibi konularda öğrencilerin zorluk yaşadıkları ve bazı kavram yanlışlarına sahip oldukları belirtilmektedir.

Pedagojik alan bilgisiyle ilgili olarak üç boyutlu cisimlere (Altaylı, Konyalıoğlu, Hızarcı & Kaplan, 2014; Çakmak vd., 2014; Gökbulut, 2010), sayı örüntülerine (Yeşildere & Akkoç, 2010) ve kesirlere (Arslan Kılcan, 2006) yönelik yapılan çalışmalardan elde edilen ortak sonuçlara göre öğretmen adayları kavramları anlarken zorluk yaşamakta ve hatalı tanımlamalar yapmaktadır. Bu araştırmaların diğer bir ortak yanı ise çalışmaların ortaokul düzeyinde yapılmış olmasıdır. Ortaokul düzeyinde pedagojik alan bilgisine yönelik çalışmalardan elde edilen sonuçlar lise öğretmenlerinin pedagojik alan bilgilerini açıklamada yetersiz kalmaktadır (Käpyla vd., 2009). Bu bağlamda lise matematik öğretmenlerinin matematik dersinde konuya özel pedagojik alan bilgilerini ortaya çıkaracak, alanyazında lise matematik öğretmenleriyle yapılacak durum çalışmalarının niteliğini arttıracak yeni araştırmalara ihtiyaç vardır.

Bunun yanı sıra alanyazındaki pedagojik alan bilgisi çalışmaları incelendiğinde bu çalışmaların lise matematik öğretmenleriyle değil, çoğunlukla ortaokul matematik öğretmen adaylarıyla yapıldığı görülmüştür (Akkoç, Yeşildere & Özmantar, 2007; Krauss, Baumert & Blum, 2008; Gökkurt, Şahin, Soylu & Doğan, 2015; Lannin, Webb, Chval, Arbaugh, Hicks, Taylor & Bruton, 2013; Tichá & Hošpesová, 2010). Matematik öğretmen adaylarından elde edilen bilgiler lise matematik öğretmenlerinin konuya dönük pedagojik alan bilgilerini belirlemede ve durumlarını tam olarak yansıtmada yetersiz kalabilir. Bu nedenle mevcut çalışmanın bizzat öğretmenlik mesleğinin içinde olan ve öğretim sürecinde rol oynayan öğretmenlerle yapılmasına karar verilmiştir. Buradan hareketle yapılan bu araştırmanın amacını lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına, türevin tanımının görselleştirilmesine ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgilerini konu alanı bilgisi bağlamında incelemek teşkil etmiştir.

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada nitel araştırma modellerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Nitel çalışmalar, araştırma yapılan bireylere yönelik görüşlerin ve konuya yönelik özelliklerinin detaylı şekilde betimlendiği çalışmalardır (Ekiz, 2009). Durum çalışmaları ise sınırları belirli bir kitleye, bir olaya ya da duruma odaklanma fırsatı veren ve araştırılan konu üzerinde derinlemesine inceleme yapmayı sağlayan araştırmalardır (Çepni, 2012; Yin, 1994). Mevcut araştırmada lise matematik öğretmenlerinin konu alanı bilgileri arasındaki benzerlikler ve farklılıklar belirleneceğinden durum çalışması tercih edilmiştir.

Araştırmanın Katılımcıları

2015-2016 öğretim yılı güz döneminde gerçekleştirilen bu araştırmanın katılımcılarını Karadeniz Bölgesi'nin bir ilinde Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı genel liselerde görev yapan dört matematik öğretmeni oluşturmuştur. Öğretmenler belirlenirken amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme kullanılmıştır. Araştırmacılar uygulama yapılmadan önce çalışmanın dört lise

matematik öğretmeniyle gerçekleştirileceği konusunda görüş birliğine varmıştır. Aynı zamanda çalışmaya katılacak öğretmenlerden ikisinin eğitim fakültesi mezunu diğer ikisinin ise fen-edebiyat fakültesi mezunu öğretmenler olmasına dikkat edilmiştir. Maksimum çeşitlilik örneklemesinde farklı özelliklere sahip bireylerin ortaya koyduğu görüşler genelleme kaygısı duymadan geniş bir perspektiften değerlendirilmektedir (Patton, 1990).

Bu araştırmada maksimum çeşitlilik örneklemesinin tercih edilmesinin sebebi ise mezun olunan farklı fakültelere ve farklı öğretim deneyimlerine sahip öğretmenlerin bakış açılarından yararlanarak araştırma probleminin çeşitli boyutlarını gün yüzüne çıkarmaktır. Araştırmada lise matematik öğretmenlerinin tercih edilmesinin sebebi ise araştırmaya katılan öğretmenlerin lisans öğrenimleri sırasında Analiz I-II ile matematik öğretimi derslerini almış olmalarıdır. Araştırmanın ortaöğretim on ikinci sınıf düzeyinde yapılmasının sebebi ise bu düzeydeki matematik ders programında türev konusunun yer almış olmasıdır. Araştırmaya katılan öğretmenlerin kimliklerini gizlemek amacıyla öğretmenlere Ö₁, Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ şeklinde kodlar verilmiştir. Lise matematik öğretmenlerinin demografik özelliklerine yönelik bilgiler tablo 1’de sunulmuştur.

Tablo 1. Öğretmenlerin Demografik Özellikleri

Öğretmenler	Mezuniyet	Cinsiyet	Hizmet Süresi
Ö ₁	FEF	Bay	9 yıl
Ö ₂	EF	Bayan	15 yıl
Ö ₃	EF	Bay	23 yıl
Ö ₄	FEF	Bayan	4 yıl

EF: Eğitim Fakültesi, FEF: Fen Edebiyat Fakültesi

Öğretmenlerle yapılan ön görüşmeler sonunda sadece Ö₂ lisansüstü eğitim gördüğünü açıklamıştır. Ö₃ ile yapılan ön görüşmelerde, Ö₃ lisans not transkript belgesini birinci araştırmacıya göstermiş ve matematik öğretimi dersini aldığını teyit etmiştir. Ö₁ ve Ö₄ matematik öğretme bilgilerine yönelik herhangi bir kursa/seminere

katılmadıklarını belirtmiştir. Ancak öğretmenlerden Ö₂ geogebra kullanımına yönelik seminare katıldığını ifade ederken, Ö₃ geometri öğretimine ve müfredat değişikliğine yönelik kurslara katıldığını açıklamıştır. Öğretmenlerden Ö₁, Ö₂ ve Ö₃ türevin öğretimine yönelik kendilerini “yeterli” bulduklarını belirtirken Ö₄ türev öğretiminde kendisini “yetersiz” bulunduğunu ifade etmiştir. Öğretmenlerden Ö₁ ve Ö₃ lisans döneminde matematik dersindeki başarılarını “çok iyi” şeklinde açıklarken Ö₂ ve Ö₄ lisans döneminde matematik dersindeki başarılarını “orta” şeklinde belirtmiştir.

Veri Toplama Aracı

Araştırmada lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına, türevin tanımının görselleştirilmesine ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgilerini konu alanı bilgisi bağlamında ortaya çıkarmak amacıyla araştırmacılar tarafından geliştirilmiş olan yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Görüşme formunun geliştirilmesi süresinde türev konusunu inceleyen çalışmalar (Duru, 2006; Yıldız, 2006) ve pedagojik alan bilgisini inceleyen çalışmalar (Alev & Karal, 2013; Canbazoglu vd., 2010; Dani, 2004; Işıksal, 2006) dikkate alınmıştır.

Taslak haldeki görüşme formunda üç bölüm ve her bölüm içerisinde bir soru bulunmaktadır. Görüşme formunun bölümleri sırasıyla “türevin tanımını açıklama”, “türevin tanımını görselleştirme” ve “türev-süreklilik ilişkisi” şeklinde isimlendirilmiştir. Nihai görüşmeler öncesi araştırmanın kapsam geçerliğini arttırmak amacıyla formdaki sorular, türev alanında çalışma yapan iki öğretim üyesi, matematik eğitimi alanında çalışma yapan iki araştırma görevlisi ve bir matematik öğretmeni olmak üzere beş uzman tarafından incelenmiştir.

Uzmanların görüşleri alınarak soru köklerinde bazı düzeltmelere gidilmiştir. Buna göre taslak görüşme formunda “*Türev kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz? Size göre türev ne demektir?*” şeklinde yer alan birinci soru için kavramların kişiden kişiye değişiklik göstermemesi ve ikinci soru parçasının ilk soru parçasından daha farklı cevaplara ulaştırmaması gerekçesiyle formun birinci sorusunun “*Türev kavramı hakkında bilgi verebilir misiniz?*” şeklinde

kalmasına karar verilmiştir. “*Verdiğiniz bilgiler doğrultusunda türev kavramıyla ilgili zihninizde canlanan şekli çizer misiniz?*” şeklindeki ikinci soruda uzmanlar, yapılan çizimlerde sınırlama olmaması için öğretmenlerin zihinde canlanan objenin şekil olmasının yanı sıra grafik ya da tablo gibi görselleri kullanarak verecekleri cevapların da dikkate alınması gerektiğini belirtmiştir. Bu nedenle formun ikinci sorusu “*...zihninizde canlanan şekli/grafiği/tabloyu çizer misiniz?*” şeklinde düzeltilmiştir. “*Türev kavramı ile süreklilik kavramı arasında herhangi bir ilişki var mıdır?Varsa cebirsel/görsel olarak nasıl açıklarsınız?*” şeklindeki üçüncü ve son soruda uzmanlar, öğretmenlerin bu iki kavram arasında ilişki olmadığını ve bu durumun nedenini kendilerince açıklayabileceklerinin göz önünde bulundurulması gerektiğini belirtmiştir. Bu nedenle görüşme formunun üçüncü sorusuna “*...yoksa neden yoktur?*” şeklinde soru parçasının eklenmesine karar verilmiştir.

Taslak haldeki görüşme formunun pilot uygulaması 2015-2016 öğretim yılı güz döneminde iki lise matematik öğretmeniyle ders saatleri dışındaki boş saatlerde gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamalar her iki öğretmen için 30 dakika sürmüştür. Pilot uygulama sonunda öğretmenlerin güçlük çektikleri sorular iki öğretim üyesi, bir araştırma görevlisi ve dil bilgisi alanında uzmanlaşmış bir türkçe öğretmeni tarafından tekrar incelenip yeniden düzenlenmiştir. Son hali verilen görüşme formunun nihai uygulaması yapılmadan önce ilgili kurumlardan resmi izinler alınmıştır. Aynı zamanda görüşmenin yapılacağı öğretmenin bağlı bulunduğu okul idaresi de yapılacak olan bu görüşmelerden haberdar edilmiştir. Nihai uygulama öncesi görüşme yapılacak öğretmenlere; görüşmelerin gönüllülük esasına bağlı gerçekleştirileceği, yapılan uygulamanın sadece bilimsel bir çalışmada kullanılacağı ve kimliklerin gizli tutulacağı açıklanmıştır. Ancak buna rağmen nihai uygulama için belirlenen altı lise matematik öğretmeninden bir bay ve bir bayan öğretmen çok yoğun oldukları gerekçesiyle görüşmelere katılamayacaklarını bildirmiştir. Geriye kalan dört öğretmen nihai uygulamaya kendi istekleri doğrultusunda katılmak istediklerini belirtmiştir.

Nihai uygulama 2015-2016 öğretim yılı güz döneminde öğretmenlerin görev yaptıkları okulların kantinlerinde ve dersin olmadığı boş vakitlerde gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerin her biriyle

yapılan görüşmeler 25 dakika sürmüştür. Görüşme formundaki sorular öğretmenlerin her birine aynı sırayla sorulmuştur. Görüşmelerin tamamı ses kayıt cihazıyla kaydedilmiştir. Çizim gerektiren yerlerde kamera yardımıyla video kaydı yapılmıştır. Görüşmeler sonrası elde edilen kayıtlar araştırmacılardan biri tarafından transkript edilmiştir. Transkriptler sonunda her bir öğretmenle yapılan görüşmeler ses kayıt cihazından ve kameradan tekrar takip edilmiştir. Böylece transkriptlerin doğru oluşturulup oluşturulmadığı teyit edilmiştir.

Verilerin Analizi

Araştırmanın verileri içerik analizi tekniğiyle incelenmiştir. İçerik analizinde veri toplama araçlarından elde edilen veriler benzer ve farklı özelliklerine göre sistematik şekilde tasnif edilerek kategoriler ve kodlar çerçevesinde bütünleştirilip okuyucunun anlayacağı şekilde düzenlenir (Tavşancıl & Aslan, 2001; Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu çalışmada türevin tanımından, türevin tanımının görselleştirilmesinden ve türev-süreklilik ilişkisinden elde edilen verilerin kategoriler ve kodlar altında tanımlanması sürecinde Zazkis ve Leiken (2008) tarafından belirlenen ve Gökkurt (2014) tarafından genişletilen çerçeve kullanılmıştır. Bu çerçevede erişebilirlik, doğruluk, zenginlik ve genelleştirme olmak üzere dört kategori bulunmaktadır.

Erişebilirlik kategorisinde; zorlanmadan kısa süre içinde verilen cevaplar *kolay verilmiş cevap*, duraksayarak verilen cevaplar *zor verilmiş cevap*, sorulara zorlanarak cevap verirken kısa bir süre düşünüp sonra verilen cevaplar *kısmen zor verilmiş cevap*, herhangi bir şekilde verilmeyen cevaplar ise *cevap yok* kodu altında tanımlanmıştır.

Doğruluk kategorisinde; kavrama yönelik kritik özelliklerin tümünü içinde barındıran açıklamalar *gerekli ve yeterli*, kritik özelliklerinin bir bölümünün olduğu açıklamalar *gerekli ve yetersiz*, kritik olan ve olmayan özellikler içeren ancak kritik özelliklerin tümünü barındırmayan açıklamalar *kısmen gerekli ve yetersiz*, hiçbir kritik özellik içermeyen açıklamalar ise *ne gerekli ne yeterli* kodu altında tanımlanmıştır.

Zenginlik kategorisinde; ders kitaplarında ve alan öğretim kitaplarında yer alan günlük hayat örnekleri ile çizimler *prototip*

örnek, ders ve alan kitaplarında yer almayan günlük hayat örnekleri ile çizimler ise *prototip olmayan örnek* kodu altında tanımlanmıştır. Günlük hayattan verilen örnekler öğrencilerin zihinlerinde doğru kavram imajı oluşturmaya olanak veriyorsa *uygun örnek*, örnekler öğrencilerin zihinlerinde oluşan kavram imajıyla tam olarak örtüşmüyorsa *kısmen uygun örnek* kodu altında değerlendirilmiştir.

Genelleştirme kategorisinde; kavrama yönelik yapılan tanım başka kavramların tanımlarını içermiyorsa *özel tanım*, başka kavramların tanımlarını da içeriyorsa *genel tanım* kodu altında değerlendirilmiştir. Bu araştırmada öğretmenlerin görüşme formundaki sorulara verdikleri cevaplar ayrı ayrı her bir araştırmacı tarafından benzerliklerine ve farklılıklarına göre tasnif edilmiştir. Daha sonra iki araştırmacının oluşturduğu kodlar, karşılaştırma yapmak suretiyle bir araya getirilerek görüş birliğine varılıp tekrar düzenlenmiştir. Çalışmayla ilgisi olmadığı düşünülen ve bir anlam verilemeyen kodlar araştırma dışında tutulmuştur. Araştırmacılar arasındaki kodlamalara yönelik uyum yüzdesi Miles ve Huberman (1994)'ün güvenilirliği hesaplama formülüne göre .87 bulunmuştur.

Araştırmanın kalitesini yükseltmek için çalışma sürecinde bazı stratejiler (Yıldırım, 2010) uygulanmıştır. Buna göre öğretmenlerden elde edilen veriler üzerinde daha fazla düşünerek araştırmanın daha tutarlı olmasını sağlamak ve daha farklı bakış açısını geliştirmek amacıyla (Glesne & Peshkin, 1992; akt. Roberts & Priest, 2006) araştırma sonunda bütün öğretmenlerle bire bir görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde nihai uygulamada beğenilen bölümler, dikkat çeken yönler ve karşılaşılan zorluklara yönelik öğretmen dönütleri alınmıştır. Geçerliliği arttırmak amacıyla çeşitleme yoluna gidilerek (Glesne, 2013) görüşme ve doküman analizi gibi birden fazla veri toplama aracı kullanılmıştır.

Uygulamaya katılan öğretmenlerin araştırmacıya olan güvenini arttırmak ve olguların daha kolay ortaya çıkarmak amacıyla (Daymon & Holloway, 2003) her bir öğretmenle yirmi beş dakikalık görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Okuyucuların gözünde şeffaf bir araştırma algısı yaratmak amacıyla (Twycross & Shields, 2005) araştırmanın yöntemi ile bulgular açık ve net bir şekilde yansıtılmıştır. Araştırmacılar dışında farklı bir uzman tarafından değerlendirilen araştırmaların niteliğinin artacağı düşüncesiyle (Marvasti, 2004) araştırmacılar

tarafından oluşturulan kodlar nitel araştırma alanında uzmanlaşmış bir öğretim üyesine gösterilmiş ve yapılan kodlamalara yönelik teyit alınmıştır.

Bulgular

Türevi Tanımlama ve Örneklendirme

Tablo 2’de öğretmenlerin türevle ilgili yaptıkları tanımların ve örneklerinin Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirmesi yapılmıştır.

Tablo 2.Türevin Tanımına ve Örneklerine Yönelik Kategoriler/Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen kodları
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö ₂ Ö ₃
	Kısmen zor verilmiş cevap	Ö ₄
	Zor verilmiş cevap	Ö ₁
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	
	Gerekli ve yetersiz	Ö ₁ Ö ₂ Ö ₃ Ö ₄
	Kısmen gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek verme	Ö ₁ Ö ₂ Ö ₄
	Prototip olmayan örnek verme	Ö ₃
Genelleştirme	Özel tanım kullanma	Ö ₁ Ö ₃ Ö ₄
	Genel tanım kullanma	Ö ₂

Tablo 2’de verilen bulgular erişebilirlik açısından incelendiğinde, iki öğretmenin türevin tanımını ve türeve yönelik örnekleri çaba sarf etmeden cevapladıkları görülmüştür. Diğer taraftan yapılan görüşmelerde, Ö₁ öğretmenin türevin tanımını yaparken

biraz düşünerek cevap verdiği ortaya çıkmıştır. Doğruluk açısından ele alındığında ise, öğretmenlerin tamamının türevin tanımında olması gereken kritik özelliklerin bazılarını doğru söyledikleri bazılarını ise söylemedikleri görülmüştür. Buradan hareketle tüm öğretmenlerin türevi doğru ancak eksik tanımladıkları söylenebilir. Öğretmenlerin türevle ilgili yaptıkları tanımlar tablo 3’te sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmenlerin Türevin Tanımına İlişkin Görüşleri

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Yani burada pay kısmındaki yazdığımız y ’deki değişim, payda kısmında yazdığımız ise x ’teki değişim. y ’deki değişimin x ’teki değişime oranı, yani o çok küçük mesafedeki oran bize o anlık değişimi verecek. Buna biz x_0 noktasındaki türev diyeceğiz (Ö₁)

Belli bir andaki türevi bulmak istiyorsak bunu limitle ilişkilendiririz. Yani

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ şeklinde ifade edebiliriz (Ö}_2\text{)}$$

$f(x)$ bir aralıkta sürekli olsun. Yani $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0)$ “h” sıfır’a giderken “ $f(x+h)-f(x)$ ” bölü “h” limitinin değeri fonksiyonun türevidir (Ö₃)

Bir eğrinin bir noktadaki eğimi diyebiliriz. Ya da çok yakın değerlerdeki değişim oranı türevi verir. Limitle bağlantılı olduğunu düşünüyorum. Cebirsel olarak bu şekilde ifade $\lim_{x \rightarrow h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ edebiliriz türevi (Ö₄)

Tablo 3’teki öğretmen tanımları ayrıntılı incelendiğinde, yapılan tanımların gereksiz bilgi ya da eksik bilgi içerdiği görülmüştür. Balcı (1999), Demir (2014), Thomas, Weir, Hass ve Giordano (2009) ile Kadioğlu ve Kamalı (2009)’a göre türevin tanımında açıklanan “fonksiyonun tanım ve değer kümelerinin belirtilmesi, türevi aranacak noktanın özelliklerinin belirtilmesi ve fonksiyondaki artmanın değişkendeki artmaya oranının, değışkendeki artmanın sıfıra yaklaşması halindeki limitini gösteren formülün belirtilmesi”

durumları dikkate alındığında öğretmenlerin yaptıkları tanımların tam doğru tanımlar olduğu söylenemez. $\ddot{O}_1$ öğretmenin yaptığı tanımda belirtilen kapalı aralığın hangi kümenin bir alt kümesi olduğu net şekilde ifade edilmemiş ve türevin cebirsel tanımı yoluyla bulunan limit değerinin fonksiyonun $x=x_0$ noktasındaki türevine karşılık geldiği belirtilmemiştir. $\ddot{O}_2$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ öğretmenlerinin yaptıkları tanımlarda ise fonksiyonun tanım ve değer kümeleri ile türevi aranacak x_0 noktasının hangi kümenin bir elemanı olduğu açık ve net bir şekilde belirtilmemiştir. Ayrıca $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ öğretmenleri tarafından “h” artım ifadesinin hangi kavrama karşılık yazıldığı ve bu kavrama nasıl ulaşıldığı belirtilmemiştir.

Öte yandan tüm öğretmenler türevin tanımını yaparken bu kavramın günlük hayatta kısaca neyi ifade ettiğini açıklamaya ve örneklendirmeye çalışmıştır. Buna göre öğretmenlerden $\ddot{O}_1$ türevi “anlık değişim... Ondan sonra değişim hızı diyebiliriz. Bir şeyin en’ini (en büyük değer, en küçük değer, en yüksek hız) bulmak için kullandığımız matematiksel kavram” şeklinde belirtmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_2$ türevi “anlık değişimdir. Mesela bir taşı durgun bir suya attığınızda su üzerinde oluşan halkaları düşünelim. Önce küçük bir çember sonra biraz daha büyük bir yarıçapa sahip çember öyle büyüyerek gidiyor. İşte biz suyun taşa dokunduğu andan itibaren belli bir saniyedeki, o anlık, çemberin çevresinin büyümesini hesap ettiğimizi düşünelim. İşte burada türev devreye girecektir. Anlık değişim hızını verecektir” şeklinde kısaca açıklamış ve örneklendirmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ türevi “azaltılmış, küçültülmüş... Mesela çayın en son kalmış hali” şeklinde ifade etmiştir. Öğretmenlerden $\ddot{O}_4$ ise türevi bir eğrinin bir noktadaki “değişim oranı” şeklinde açıklamıştır.

Öğretmenlerin verdikleri cevaplar zenginlik kategorisine göre incelendiğinde $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ öğretmenleri tarafından verilen günlük hayat örneklerinin lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2011; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Gürler & Yılmaz, 2016) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Çetinkaya, Erbaş & Alacalı, 2013; Demir, 2014; Thomas vd., 2009, Yağcı, 2014) yer alması bu örneklerin prototip olma özelliğine sahip olduğunu ortaya koymuştur. Ancak $\ddot{O}_3$ öğretmenin türevle ilgili verdiği örneklerin prototip örnekler olmadığı söylenebilir. Bunun

dışında $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_3$ öğretmenlerinin türevle ilgili günlük yaşamdan öne sürdükleri örneklerin uygunlukları incelendiğinde $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ öğretmenleri tarafından öne sürülen “*anlık değişim*” ile $\ddot{O}_4$ öğretmeni tarafından öne sürülen “*değişim oranı*” örneklerinin türevi çağrıştırdığı ve bireylerin zihinlerine yer edecek doğru bir kavram imajı olduğu söylenebilir. Bu nedenle bu öğretmenler tarafından verilen örnekler “*uygun örnek*” kategorisinde değerlendirilmiştir. $\ddot{O}_3$ öğretmeni tarafından öne sürülen “*azaltılmış, küçültülmüş*” şeklindeki örneklerin her zaman türev kavramını yansıttığı söylenemeyebilir. Örneğin polinom fonksiyonlarda türev aranırken üs derecesi her bir türev alma işleminde bir küçülmektedir. Ancak bazı negatif rasyonel şeklindeki polinom fonksiyonların türevleri incelendiğinde tek sayılı türevlerde pozitif sonuçlar çıkarken çift sayılı türevlerde ise negatif sonuçlar çıkmaktadır. Bu durumda ortaya çıkan sonuçlar türevin devamlı azalmaya ya da küçülmeye gitmesi durumuyla örtüşmemektedir. Bu nedenle $\ddot{O}_3$ öğretmeni tarafından öne sürülen bu örnek “*kısmen uygun örnek*” kategorisinde değerlendirilmiştir.

Öğretmenlerin verdikleri cevaplar genelleştirme kategorisine göre incelendiğinde $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ öğretmenlerinin ileri sürdükleri tanımların sadece türevle ilgili kritik özellikleri ortaya koyan tanımlar olduğu ifade edilebilir. Bu nedenle $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ tarafından ileri sürülen tanımlar “*özel tanım*” kategorisinde değerlendirilmiştir. Ancak $\ddot{O}_2$ öğretmenin ileri sürdüğü tanımın sadece türevin kritik özelliklerini ortaya koyan bir tanım olmadığı görülmektedir. Nitekim

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

burada öğrenci, tanım olarak verilen ifadesini limit konusuyla ilgili bir kavram olarak da düşünebilir. Bu nedenle $\ddot{O}_2$ öğretmeni tarafından ileri sürülen tanım sadece türevle ilgili olmayıp limitle de ilişkili olduğundan “*özele yakın tanım*” kategorisinde değerlendirilmiştir.

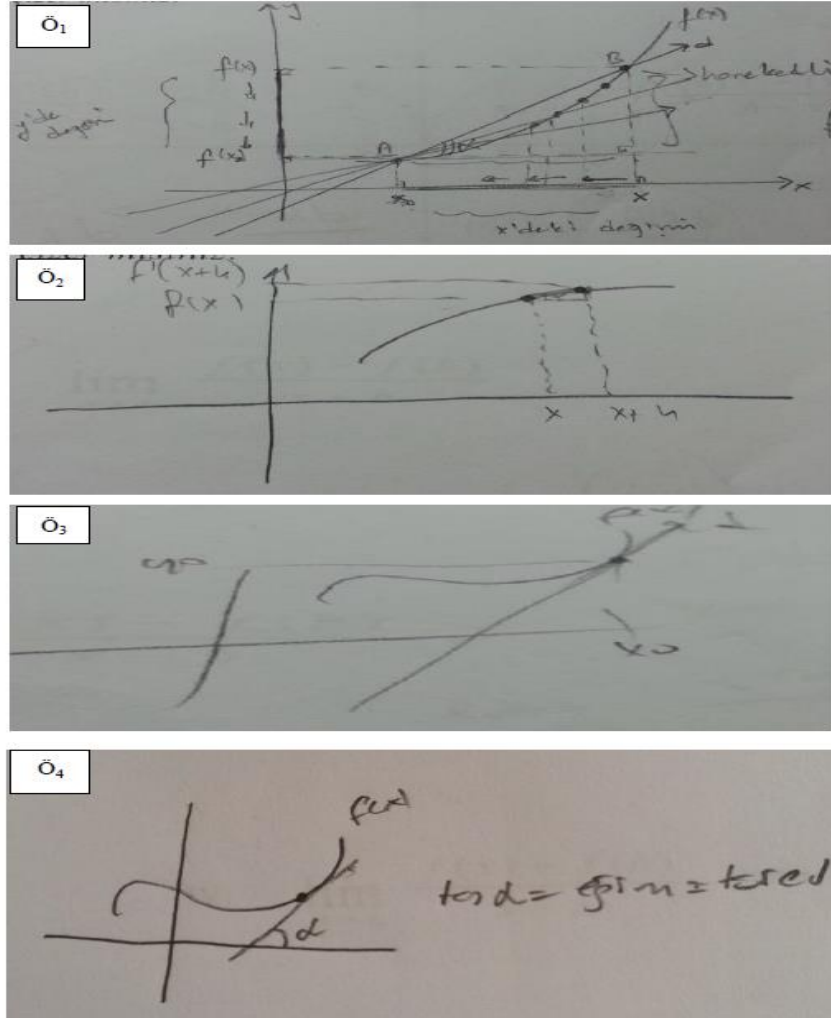
Türevin Tanımını Görselleştirme

Tablo 4’te öğretmenlerin türev tanımının görselleştirilmesine yönelik etkinlikleri Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin türevin tanımına yönelik sadece çizim örnekleri incelendiğinden ve tanım yapılması istenmediğinden genelleştirme kategorisi dikkate alınmamıştır.

Tablo 4.Türevin Tanımını Görselleştirmeye Yönelik Kategoriler/Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen kodları
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö ₁ Ö ₂ Ö ₃ Ö ₄
	Kısmen zor verilmiş cevap	
	Zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö ₁
	Gerekli ve yetersiz	Ö ₂ Ö ₃ Ö ₄
	Kısmen gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek verme	Ö ₁ Ö ₂ Ö ₃ Ö ₄
	Prototip olmayan örnek verme	

Tablo 4’te verilen bulgular erişebilirlik açısından incelendiğinde, Ö₁, Ö₂, Ö₃ ve Ö₄’ün türevin tanımına yönelik görselleri çaba sarf etmeden çizdikleri görülmektedir. Bu doğrultuda, öğretmenlerin verdikleri cevaplar erişebilirlik açısından kolay verilen cevap olarak değerlendirilmiştir. Doğruluk açısından incelendiğinde ise Ö₁ öğretmenin yapmış oldukları çizimlerin türevin tanımı için bütün kritik özellikleri barındırdığı, Ö₂, Ö₃ ve Ö₄ öğretmenlerinin yaptıkları çizimlerin ise türevin tanımına yönelik gerekli ancak yetersiz özellikte olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin türevin tanımına yönelik çizim örnekleri şekil 1’de sunulmuştur.



Şekil 1.Öğretmenlerin Türevin Tanımına Yönelik Çizim Örnekleri

Şekil 1 incelendiğinde öğretmenlerin lise ders kitaplarında (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015) ve alandaki matematik öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Kadioğlu & Kamalı, 2005; Thomas vd., 2009; Yağcı, 2014) yer alan türev-değişim oranı, türev-eğim ilişkilerine yönelik örnekler çizdikleri görülmüştür. Bununla birlikte öğretmenler türev tanımına yönelik ders kitapları ve

alan öğretim kitaplarında olmayan farklı çizimlere yer vermemiştir. Bu kapsamda öğretmenlerin yapmış oldukları çizimler zengin örnek olarak değerlendirilmemiştir. Öğretmenlerin türevin tanımına yönelik çizim örneklerini ayrıntılı incelemek amacıyla, Aydın ve Erbaş (2011), Balcı (1999), Çarhoğlu ve Gezmiş (2015), Çetinkaya ve diğerleri (2013), Demir (2014), Thomas ve diğerleri (2009) ile Yağcı (2014)'ün çalışmalarındaki türev tanımının görselleştirilmesini yansıtan kritik özellikler dikkate alınmıştır. Bu kritik özellikler; belirli bir aralıkta tanımlı olan bir fonksiyon eğrisinin çizilmesi, eğri üzerinde biri sabit diğeri hareketli iki noktanın belirlenmesi, hareketli noktanın yavaşça sabit noktaya doğru kaydırılması, eğri üzerindeki kirişin fonksiyon eğrisine teğet olduğunun belirtilmesi, türev-eğim ilişkisinin cebirsel tanımlanması ve türev-eğim arasındaki ilişkinin belirtilmesi şeklinde açıklanmıştır. Buna göre öğretmenlerin türevin tanımının çizimine yönelik hangi özellikleri dikkate aldıkları tablo 5'te araştırmacılar tarafından oluşturulan kategorilere ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 5. Türevin Tanımının Çizimine Yönelik Kategori Ve Kodlar

Kategori	Kodlar	Ölçütler			Destekleyici Cümleler
		Evet	Kısmen	Hayır	
Türevin Tanımının Çizimi	Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyon eğrisinin çizilmesi	Ö ₁ Ö ₃	Ö ₂ Ö ₄		<i>Şöyle bir $f(x)$ eğrisi alalım. Bu herhangi bir eğri olabilir. Bir (a,b) aralığında tanımlı olsun ($\bar{O}_4$)</i>
	Eğri üzerinde biri sabit diğeri hareketli iki noktanın belirlenmesi	Ö ₁ Ö ₂	Ö ₃	Ö ₄	<i>Bu eğri üzerinde x'imiz bu nokta olsun. Bu noktanın görüntüsüne de $f(x)$ diyelim. Şimdi x'ten h kadar uzaklaşıyoruz. Sağa doğru. Uzaklaştığımız bu nokta $(x+h)$ iken görüntüsü de $f(x+h)$ olacaktır. Bu noktayı hareketli kabul edelim ($\bar{O}_2$)</i>

Hareketli noktanın yavaş yavaş sabit noktaya doğru kaydırılması	Ö ₁ Ö ₂	Ö ₃ Ö ₄	Şimdi bu hareketli B noktasını A'ya doğru yaklaştıracam. A'ya yaklaştırdığımda d doğrusunun f(x) üzerindeki grafiksel değişimine bakalım (Ö ₁)
Eğri üzerindeki kirişin eğriye teğet olduğunun açıklanması	Ö ₁ Ö ₂	Ö ₃ Ö ₄	Burada x noktasındaki teğete bakıyoruz. Teğetin eğimine bakıyoruz. Kaleme dokundukça yani x'e doğru yaklaştıkça Teğetlerin eğimleri değişiyor. Bir yerde kiriş teğet oluyor (Ö ₂)
Türev-Eğim ilişkisinin cebirsel tanımlanması	Ö ₁ Ö ₂	Ö ₃ Ö ₄	y'deki değişimi x'teki değişime oranladık. Bu da "tana" dediğimiz ifadeye eşit olacak. Bu durumda eğim aşağıdaki gibi yazılır (Ö ₁) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Türev-Eğim arasındaki ilişkinin belirtilmesi	Ö ₁ Ö ₃ Ö ₄	Ö ₂	f(x)'in türevinde x ₀ 'ın değeri d doğrusunun eğimini verir (Ö ₃)

Tablo 5 incelendiğinde Ö₁ öğretmenin türevin tanımına yönelik doğru bir çizim yaptığı söylenebilir. Ancak Ö₂, Ö₃ ve Ö₄'ün türevin tanımına yönelik yaptıkları çizimlerde bazı kritik özelliklerin dikkate alınmadığı tespit edilmiştir. Bununla ilgili olarak Ö₂'nin yaptığı açıklamalar ile çizimi incelendiğinde Ö₂'nin belirli bir aralıkta tanımlı olan bir fonksiyon eğrisinin çiziminde ve türev-eğim arasındaki ilişkiyi ifade etmede yetersiz kaldığı görülmüştür. Ö₃'ün yaptığı açıklamalar ile çizimi incelendiğinde Ö₃'ün eğri üzerinde biri sabit diğeri hareketli iki noktayı belirlemede yetersiz kaldığı söylenebilir. Aynı zamanda Ö₃ hareketli noktayı yavaşça sabit noktaya kaydırma, eğri üzerindeki kirişin eğriye teğet olduğunu açıklama ve türev-eğim ilişkisini cebirsel olarak tanımlama gibi etkinlikleri de gerçekleştirmemiştir. Ö₄'ün yaptığı açıklamalar ile çizimi incelendiğinde ise Ö₄'ün belirli bir aralıkta tanımlı olan bir eğrinin çiziminde yeterli olmadığı ifade edilebilir. Ayrıca Ö₄ hareketli noktayı

yavaşça sabit noktaya kaydırma, eğri üzerindeki kirişin eğriye teğet olduğunu açıklama ve türev-eğim ilişkisini cebirsel olarak tanımlama gibi etkinlikleri de gerçekleştirmemiştir.

Türev-Süreklilik İlişkisi

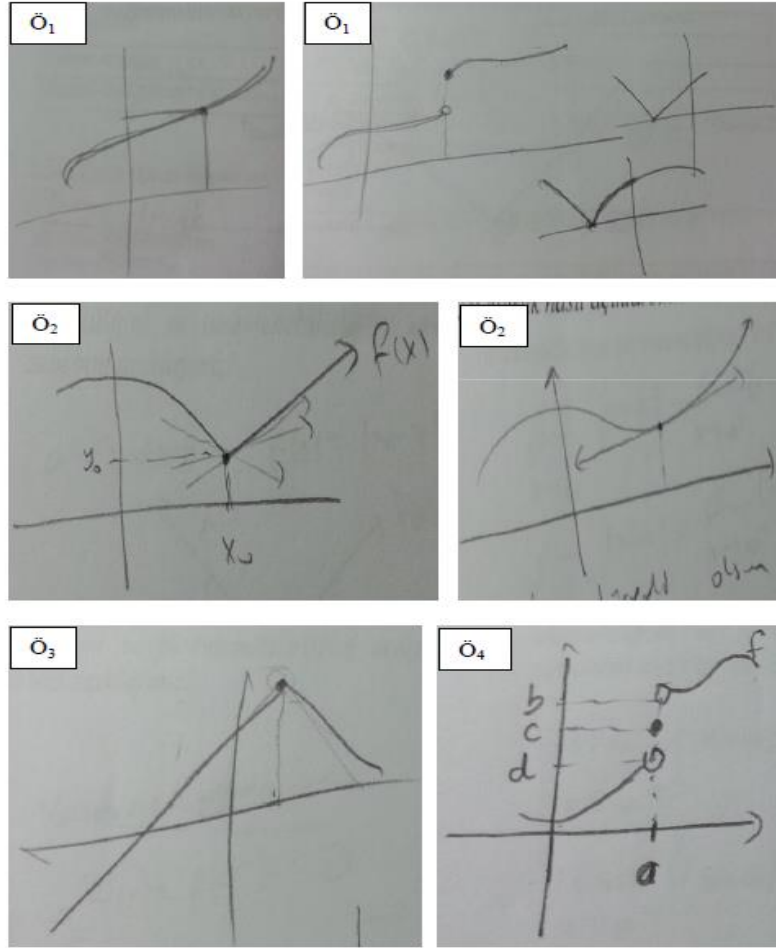
Tablo 6’da öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik etkinlikleri Zazkis ve Leiken (2008)’in kategorilerine göre değerlendirilmiştir. Türev-süreklilik arasındaki ilişki incelendiğinden ve tanım yapılması istenmediğinden genelleştirme kategorisi dikkate alınmamıştır.

Tablo 6. Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Kategoriler/Kodlar

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen kodları
Erişebilirlik	Kolay verilmiş cevap	Ö ₁ Ö ₂ Ö ₃
	Kısmen zor verilmiş cevap	Ö ₄
	Zor verilmiş cevap	
	Cevap yok	
Doğruluk	Gerekli ve yeterli	Ö ₁ Ö ₂
	Gerekli ve yetersiz	Ö ₃ Ö ₄
	Kısmen gerekli ve yetersiz	
	Ne gerekli ne yeterli	
Zenginlik	Prototip örnek verme	Ö ₁ Ö ₃ Ö ₄
	Prototip olmayan örnek verme	Ö ₂

Tablo 6’da verilen bulgular erişebilirlik açısından incelendiğinde, Ö₁, Ö₂ ve Ö₃ öğretmenlerinin türev-süreklilik ilişkisini zorlanmadan açıkladıkları ve bu iki kavram arasındaki ilişkiyi gösteren grafikleri kolayca kağıda yansıttıkları görülmüştür. Bu nedenle bu üç öğretmenin verdikleri cevaplar erişebilirlik açısından kolay verilen cevaplar olarak değerlendirilmiştir. Ancak Ö₄’ün türev-süreklilik ilişkisini grafik yardımıyla belirtirken bir ara duraksadığı ve düşündüğü sonra ise grafiği çizmeye devam ettiği tespit edilmiştir. Bu nedenle bu öğretmenin verdiği cevap erişebilirlik açısından kısmen

zor verilmiş cevap kategorisi altında değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin yaptıkları açıklamalar doğruluk açısından incelendiğinde $\bar{O}_1$ ve $\bar{O}_2$ taraflarından yapılan açıklamaların ve verilen örneklerin türev-süreklilik ilişkisini yansıttığı, $\bar{O}_3$ ve $\bar{O}_4$ öğretmenleri taraflarından yapılan açıklamaların ise gerekli olduğu halde verilen örneklerin yetersiz olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik çizim örnekleri şekil 2’de sunulmuştur.



Şekil 2. Türev-Süreklilik İlişkisine Yönelik Çizim Örnekleri

sürekli olmadığı bir noktada türevli olmaması ve fonksiyonun türevli olduğu bir noktada sürekli olması şeklinde açıklanmıştır. Buna göre öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisini açıklarken hangi özellikleri dikkate aldıkları tablo 7’de araştırmacılar tarafından oluşturulan kategorilere ve kodlara göre incelenmiştir.

Tablo 7. Türev-Süreklilik İlişkisinin Gösterimine Yönelik Kategori Ve Kodlar

Kategori	Kodlar	Ölçütler		Destekleyici Cümleler
		Evet	Hayır	
Türev-Süreklilik ilişkisinin Görselleştirilmesi	Fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olması	$\ddot{O}_1 \ddot{O}_2$ $\ddot{O}_4$	$\ddot{O}_3$	Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir noktada önce sağ ve sol limit değerlerine bakılır. Bulunan bu değerler birbirine eşit ve fonksiyonun o noktadaki değeri de bu sağ-sol limit değerine eşitse fonksiyon o noktada süreklidir. Ancak bu türevli olması için yetmez. Aynı noktada sağdan ve soldan türevlere bakılır. Sağ ve sol türev değerleri birbirine eşit olduğunda fonksiyon o noktada türevli olur ($\ddot{O}_1$)
	Fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmaması	$\ddot{O}_1$ $\ddot{O}_2 \ddot{O}_3$	$\ddot{O}_4$	Şimdi bir $f(x)= x-2 $ fonksiyonu düşünelim. Yani doğrusal fonksiyonların kırılmış hallerinden. Fonksiyonun $x=2$ noktasında sürekliliğine engel olan hiçbir şey yokken fonksiyon bu noktada türevsizdir. Çünkü o noktada soldan eğimle sağdan eğim birbirinden farklı olduğu için. Yani sol türev ve sağ türev değerleri birbirinden farklıdır. Dolayısıyla türevsizdir ($\ddot{O}_3$)
	Fonksiyonun sürekli olmadığı noktada türevli olmaması	$\ddot{O}_1 \ddot{O}_2$ $\ddot{O}_4$	$\ddot{O}_3$	x ekseninde bir “a” noktası alalım. Bu a noktasının görüntüsü c olsun. Fonksiyonun limitine sağdan baktığımda “b” değeri, limitine soldan baktığımda ise “d” değeri çıkıyor. Fonksiyonun “a” noktasındaki değeri limit değerlerine ve bu değerler de birbirlerine eşit olmuyor. O nedenle fonksiyon “a” noktasında süreksizdir. Süreksiz olduğu için de aynı noktada türevsizdir ($\ddot{O}_4$)

Fonksiyonun türevli
olduğu noktada
sürekli olması

Ö₁ Ö₂
Ö₄

Ö₃

Şöyle düşünelim. $f(x)$ fonksiyonunun bir $x=x_0 \in [a,b]$ noktasında türevli olduğunu düşünelim. Bu durumda sürekli olduğunu şu şekilde yazılabiliriz (Ö₂):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= f'(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \times g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f'(x_0) + 0 \times g(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f'(x_0) \end{aligned}$$

Tablo 7 incelendiğinde Ö₁ ve Ö₂'nin türev-süreklilik ilişkisinin görselleştirilmesi sürecindeki açıklamalarının yeterli olduğu söylenebilir. Ancak Ö₃ ve Ö₄'ün türev-süreklilik ilişkisinin görselleştirilmesine yönelik çizimlerinin ve yaptıkları açıklamaların yeterli olmadığı söylenebilir. Ö₃ türev-süreklilik arasındaki ilişkiyi anlatırken fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmayacağına yönelik çizim yapmasına rağmen fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olabileceğine, sürekli olmadığı noktada türevli olmayacağına ve türevli olduğu noktada sürekli olmasına yönelik herhangi bir çizim yapmamış ve bu durumu destekleyici bir açıklamada bulunmamıştır. Ö₄ öğretmeni ise türev-süreklilik arasındaki ilişkiyi anlatırken fonksiyonun sürekli olduğu noktada türevli olmayacağına yönelik herhangi bir çizim yapmamış ve bu durumu destekleyici bir açıklamada bulunmamıştır.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Lise matematik öğretmenlerinin türev kavramına yönelik tanımları ayrıntılı incelendiğinde tüm öğretmenlerin türeve yönelik gerekli ancak yeterli olmayan tanımlar yaptıkları görülmüştür. Ö₂, Ö₃ ve Ö₄'e nispeten daha yeterli bir tanımda bulunan Ö₁ türevin tanımını yaparken fonksiyonun belirli bir aralıkta tanımlı olduğunu belirtmiş ancak tanım-görüntü kümelerine ve türevi aranacak x_0 noktasının açık aralığın bir elemanı olmasına dikkat etmemiştir. Ö₂ ise türevin

tanımını sembolik olarak göstermesine rağmen fonksiyonun tanım-görüntü kümelerine, fonksiyonun tanımlı olduğu açık aralığa, türevi aranacak x_0 noktasının bu açık aralığın bir elemanı olmasına ve türevin cebirsel tanımı yoluyla bulunan limit değerinin $x=x_0$ noktasındaki türeve karşılık geldiğine değinmemiştir. Oysaki Yağcı (1999) ile Kadioğlu ve Kamalı (2005)'e göre türev kavramı sembolik olarak şu şekilde tanımlamıştır:

$$f: R \rightarrow R \text{ ve } (a,b) \text{ açık aralığında tanımlı bir fonksiyon, } x_1 \in (a,b) \\ \text{olmak üzere} \quad \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

ifadesindeki limit değeri bir reel sayıysa $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_1$ noktasındaki türevi bu reel sayıya eşittir.

Yapılan bu tanımda fonksiyonun; tanım-görüntü kümeleri ile tanımlı olduğu açık aralık belirtilmiş, türevi aranacak noktanın açık aralığın bir elemanı olduğu ifade edilmiş ve türevin cebirsel tanımı yoluyla bulunan limit değerinin $x=x_1$ noktasındaki türeve karşılık geldiği açıklanmıştır. Öğretmenlerden Ö₃ ve Ö₄ türevi aranacak özel bir x_0 noktasından ziyade herhangi bir x bağımsız değişkeni için türevin arandığı cebirsel gösterimi belirtmiştir. Ö₃ ve Ö₄ fonksiyonun tanım-görüntü kümelerini belirtmemiş ve türevin cebirsel tanımını yazarken h artımının nasıl kullanıldığını ifade etmemiştir. Ayrıca Ö₄ öğretmeni h artımını sıfıra yaklaştırması gerekirken x bağımsız değişkenini h artımına yaklaştırarak türevin cebirsel tanımını yanlış belirtmiştir. Oysaki Demir (2014)'e göre fonksiyonun herhangi bir x bağımsız değişken noktasındaki türevi şu şekilde açıklanmıştır:

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı olsun. $x \in (a,b)$ değişkenine bir Δx ($\Delta x > 0$ veya $\Delta x < 0$) değişimi verilsin. Bu takdirde fonksiyondaki değişim miktarı da Δy ($\Delta y > 0$, $\Delta y < 0$) olmaktadır.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ elde edilir.}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\Delta x = h$ ile gösterildiğinde

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ yazılır.}$$

Yapılan bu tanımda fonksiyonun belirli bir aralıkta tanımlı olduğu ve bağımsız değişkenin aynı aralığın bir elemanı olduğu verilmiştir. Fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevinin değeri bulunmadan önce değişkene verilen değişim miktarı, fonksiyondaki değişim miktarına oranlamıştır. Daha sonra değişkendeki değişimin sıfıra yaklaşma durumu düşünülerek o durumda varolan limit, fonksiyonun türevi olarak açıklanmıştır. Hatta Δx ifadesi h artımına eşitlendikten sonra fonksiyonun herhangi bir x bağımsız değişken noktasındaki türevinin cebirsel tanımı belirtilmiştir. Yapılan tanımlardan hareketle öğretmenlerin türev kavramının tanımına yönelik yeterli konu alanı bilgisine sahip olmadıkları söylenebilir. İlgili alanyazında da öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının türev kavramını tanımlarken zorluk yaşadıklarına dair sonuçlar yer almaktadır (Orton, 1983; Zandieh, 1997).

Açıkyıldız (2013)'ün öğretmen adaylarının türev-limit ilişkisine yönelik yüzeysel ve işlemsel bilgiye sahip olduklarına yönelik bulgusu ile türev-limit arasındaki ilişki cebirsel olarak belirtilmesine rağmen formül altındaki kavramsal yapı açıklanırken zorluk yaşandığı şeklindeki bulgusu araştırmanın bu bulgusuyla örtüşmüştür. Açıkyıldız (2013)'ün çalışmasında çoğu öğretmen adayı türevi kendi cümleleriyle yanlış şekilde açıklamıştır. Öğretmen adaylarından bazıları türevi “bir eğrinin üzerindeki herhangi bir noktadaki eğim” şeklinde açıklamıştır. Benzer açıklama bu çalışmada da söz konusudur. Ön görüşmelerde kendisini türev konusunda yetersiz bulan ve en az hizmet süresine sahip fen edebiyat fakültesi mezunu Ö₄, türevi “bir eğrinin bir noktadaki eğimi” şeklinde açıklamıştır. Oysaki türev, bir eğrinin bir noktadaki teğetinin eğimi şeklinde ifade edilmektedir (Zandieh, 2000). Ubuz (1996)'a göre yanlış yapılan tanımlamaların nedeni tanım içeriklerinin anlaşılabilmesi ve tanımın bütün olarak özümsememesidir. Bununla birlikte Ubuz (1996) ile Amoah ve Laridon (2004) öğrencilerin analizde çoklu temsiller arasındaki geçişlerde sağlıklı kavramsal bağlantılar kuramadıklarını belirtmiştir.

Öğretmenlerin türev kavramına yönelik günlük hayattan verdikleri örnekler ayrıntılı incelendiğinde bu örneklerin anlık değişim, değişim hızı ve değişim oranı gibi prototip örneklerle sınırlandırıldığı görülmüştür. Verilen bu örneklerin tümünün alan öğretim

kitaplarında (Balcı, 1999; Çetinkaya vd., 2013; Demir, 2014; Thomas vd., 2009, Yağcı, 2014) ve lise matematik ders kitaplarında (Aydın & Erbaş, 2011; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015; Gürler & Yılmaz, 2016) yer aldığı tespit edilmiştir. Ancak $\ddot{O}_1$, $\ddot{O}_2$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün “anlık değişim” ve “değişim oranı” örnekleri ve $\ddot{O}_1$ 'in “değişim hızı” örneğinin eksik örnekler olduğu söylenebilir. Çünkü $y=f(x)$ denkleminde sahip bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki anlık değişim oranı ya da anlık değişim hızı fonksiyonun o noktadaki türevi olarak tanımlandığından (Çetinkaya vd., 2013) öğretmenler tarafından verilen günlük hayat örneklerinin de kavramsal olarak türevin tam karşılığı olmadığı görülmektedir. Öte yandan sadece $\ddot{O}_3$ 'ün verdiği bir örneğin prototip olmayan örnek olduğu belirlenmiştir. Açıkıldız (2013) ile Vinner (1992)'nin öğretmen adaylarının türev kavramına yönelik günlük hayattan verdikleri örneklerin prototip örnekler olduğu bulgusu araştırmanın bu bulgusuyla örtüşmektedir.

Prototip örneklerin kavram imajı oluşturmada etkili olduğu söylenebilir (Fischbein, 1993; Hershkowitz, 1990). Ancak bir kavram öğrenilirken sadece prototip örneklerle öğretimde bulunmak öğrenenlerin sınırlı kavram imajı oluşturmaya neden olmaktadır (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). Tall ve Vinner (1981)'e göre bir kavram öğrenilirken o kavrama yönelik prototip olmayan, zengin örneklendirme yapılmalıdır. Ancak bazen bir kavrama yönelik örnek sayısını arttırmak öğrenenler üzerinde yanlış kavram imajlarının oluşmasına neden olabilmektedir (Gökkurt, 2014). Bu nedenle öğrenenlerin, zihinlerinde doğru kavram imajını oluşturmaları için kavramın özelliklerini yansıtan en uygun örneklerin tercih edilmesi gerekir (Weber, Porter & Housman, 2008).

Öğretmenlerin türevin tanımına yönelik çizim örnekleri ayrıntılı incelendiğinde tüm çizim örneklerinin lise matematik ders kitaplarında (Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015) ya da alandaki matematik öğretim kitaplarında (Balcı, 1999; Kadioğlu & Kamalı, 2005; Thomas vd., 2009; Yağcı, 2014) yer alan prototip çizimler olduğu görülmüştür. $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ 'nin yaptığı çizimlerin türev-değişim oranı ilişkisine yönelik, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün yaptığı çizimlerin ise türev-eğim ilişkisine yönelik çizimler olduğu tespit edilmiştir. Buna göre $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ 'nin zihinlerinde türev-değişim oranı ilişkisine yönelik, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ 'ün zihinlerinde ise türev-eğim ilişkisine yönelik kavram

imajına sahip oldukları söylenebilir. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerde sadece $\ddot{O}_1$ türevin tanımının çizimini gerekli ve yeterli düzeyde açıklamıştır. Buna karşın $\ddot{O}_2$, $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ türevin tanımının görselleştirilmesine yönelik gerekli ancak yetersiz açıklamalarda bulunmuştur.

Öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik görüşleri ayrıntılı incelendiğinde $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ tarafından yapılan açıklamalarla verilen örneklerin yeterli düzeyde olduğu söylenebilir. Bu sayede $\ddot{O}_1$ ve $\ddot{O}_2$ türev-süreklilik arasındaki ilişkiyi açıklayarak bu ilişkiye yönelik doğru çizim örneklerinde bulunmuştur. Bu öğretmenler türev-süreklilik ilişkisine yönelik lise matematik ders kitaplarındaki (Aydın & Erbaş, 2011; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015) örneklerle benzer formatta prototip örnekler vermiştir. Hatta $\ddot{O}_2$ türev-süreklilik ilişkisine yönelik prototip olmayan örnekler de vermiştir.

Öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$ ise türev-süreklilik ilişkisine yönelik gerekli ancak yetersiz kritik özellikler ifade etmiştir. Benzer durum aynı öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik yapılan çizimlerde de görülmüştür. Öğretmenlerin türev-süreklilik ilişkisine yönelik çizim örnekleri lise matematik ders kitaplarındaki (Aydın & Erbaş, 2011; Çakımcı & Kabasakal, 2016; Çarhoğlu & Gezmiş, 2015) ve alan öğretim kitaplarındaki (Balcı, 1999; Çetinkaya vd., 2013; Demir, 2014; Thomas vd., 2009, Yağcı, 2014) prototip örneklerle sınırlandırılmıştır.

Öğretmenlerden $\ddot{O}_3$ ve $\ddot{O}_4$, Balcı (1999), Çakımcı ve Kabasakal (2016) ile Yağcı (2014)'ün çalışmalarındaki türev-süreklilik ilişkisini yansıtan kritik özellikleri eksik belirtmiştir. Araştırmanın bu bulgusu Viholainen (2006)'nın öğretmen adaylarının türev-süreklilik ilişkisini yetersiz açıkladıkları şeklindeki bulguyla örtüşürken Açıkyıldız (2013)'ın fonksiyonun sürekli olunan her noktada türevli olduğu şeklindeki bulgusuyla çelişmiştir. Açıkyıldız (2013)'ün çalışmasında öğretmen adayları sürekliliği fonksiyonun bir noktada türevli olması için yeterli koşul olarak düşündüklerinden fonksiyonun sürekli olduğu halde türevsiz olduğu kırılma noktalarını dikkate almamıştır. Bu nedenle öğretmen adayları, fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olması gerektiğini belirtmiştir.

Tüm bu sonuçlara göre öğretmenlerin türevin tanımına, türevin tanımının görselleştirilmesine ve türev-süreklilik arasındaki ilişkinin belirtilmesine yönelik konu alanı bilgilerinin yeterli olmadığı görülmüştür. Ayrıca öğretmenlerin türevin tanımı, türevin tanımının görselleştirilmesi ve türeve günlük hayattan örnekler verilmesi konusunda bazı zorluklara sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğretmenlerin türeve yönelik konu alanı bilgileri kendi aralarında karşılaştırıldığında Ö₁'in türeve yönelik konu alanı bilgisinin en iyi düzeyde olduğu, hizmet süresi en fazla olan Ö₃ ile hizmet süresi en az olan Ö₄'ün ise türeve yönelik konu alanı bilgisinin en kötü düzeyde olduğu belirlenmiştir. Buna göre öğretmenlerin konu alanı bilgilerinin belirlenmesinde mesleki deneyim kriterinin çok etkili olmadığı söylenebilir.

Konu alanı bilgileri sırasıyla en iyi ve en kötü düzeyde olan Ö₁ ve Ö₄ fen edebiyat fakültesi mezunlarıdır. Mesleki deneyim kriterine benzer şekilde mezun olunan fakültenin de öğretmenlerin konu alanı bilgi düzeylerinin belirlenmesinde çok etkili olmadığı söylenebilir. Konu alanı bilgisi en iyi düzeyde olan Ö₁ ön görüşmeler sonunda türev konusunda kendisini yeterli bulduğunu ve lisans dönemindeki matematik ders başarısının çok iyi olduğunu ifade etmiştir. Ö₁'in türeve yönelik en iyi düzeyde konu alanı bilgisine sahip olmasının nedeni lisans eğitiminde elde ettiği başarıları öğretmenlik hayatına da yansıtmış olmasından kaynaklanabilir. Konu alanı bilgisi en kötü düzeyde olan Ö₄ ile yapılan ön görüşmelerde Ö₄ türev konusunda kendisini yeterli bulmadığını açıklamıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar da dikkate alındığında Ö₄'ün türeve yönelik konu alanı bilgi düzeyindeki yetersizliğinin farkında olduğu söylenebilir. Ö₄'ün konu alanı bilgisindeki yetersizliğinin nedeni 12.sınıfta daha az matematik dersine girmiş olmasından da kaynaklanabilir. Ö₃ öğretmeniyle yapılan ön görüşmelerde, Ö₃ türev konusunda kendisini yeterli bulduğunu açıklamıştır. Ancak araştırma sonuçları da dikkate alındığında Ö₃'ün türeve yönelik konu alanı bilgisindeki yetersizliğinin farkında olmadığı söylenebilir. Bununla birlikte konu alanı bilgisindeki yetersizliğin nedeni olarak Ö₃'ün matematik dersinde kendisini yeterli gördüğü halde konular üzerinde fazla çaba harcamaması gösterilebilir. Ö₁'den sonra en iyi düzeyde konu alanı bilgisine sahip olan Ö₂ ile yapılan ön görüşmeler sonunda, Ö₂ türev

konusunda kendisini yeterli bulduğunu ve lisans döneminde matematik derslerindeki başarısının orta düzeyde olduğu belirtmiştir. Ö₂'nin türev-süreklilik ilişkisine yönelik alan öğretim kitapları dışından prototip olmayan örnekler vermesinin ve fonksiyonun türevli olduğu noktada sürekli olmasıyla ilgili ispatının sebebi matematik alanında master yapmış olmasından kaynaklanabilir.

Araştırmadan elde edilen sonuçlar birlikte değerlendirildiğinde 12.sınıflarda öğretim yapan matematik öğretmenlerinin türevin tanımını sembolik ve sözel olarak ifade etme, türeve günlük hayattan örnekler verme ve türevin tanımını görselleştirme noktasında problem yaşadıklarını göstermektedir. Ayrıca bu sonuçlar, öğretmenlerin türev-süreklilik arasındaki ilişkiye yönelik geniş çaplı muhakeme yapmadıklarını da ortaya koymuştur. Araştırmadan elde edilen sonuçlardan hareketle lisans eğitimi sırasında analiz derslerindeki fonksiyon, limit, türev ve integral gibi temel konular işlenirken kullanılacak çoklu temsillerin, matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgilerinin gelişimine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Çoklu temsiller sayesinde kavramların farklı yönlerinin görüldüğü ve farklı temsiller arası dönüşümlerde kavramın daha kalıcı öğrenildiği bilindiğinden (O'Callaghan, 1998) grafiksel, sembolik, fiziksel ve sözel olarak tanımlanabilen türev kavramı değişik formlarda temsil edilebilir. Bunun yanı sıra yüksek öğretim düzeyindeki analiz derslerinde türev tanımı anlatılırken görselleştirme yoluyla teknoloji kullanılarak öğretim sağlanabilir. Nitekim lise düzeyinde öğrencilere hitap eden öğretmenlerin türev konusunda önce kendilerinin gerekli donanımına sahip olması gerekir. Bu nedenle öğretmenler zümre toplantılarında belirli aralıklarla bir araya gelip türevin öğrencilere en doğru şekilde nasıl anlatılacağı noktasında fikir alışverişinde bulunabilirler ve türev konusunda yaşanan zorlukların giderilmesi noktasında çözüm önerileri sunabilirler.

Limit, süreklilik ve türev kavramlarının anlaşılmasında fonksiyon kavramının önemli bir etkiye sahip olduğu bilindiğinden (Ferrini Mundi & Graham, 1991) öğretmenlerin önşartlılık ilkesine dikkat etmesi gerekir. Bu nedenle türev-süreklilik arasındaki ilişkinin eksiksiz ve doğru anlatılması için fonksiyon ve limit kavramları üzerinde yoğun şekilde durulmalıdır. Mevcut çalışma lise matematik öğretmenleriyle gerçekleştirildiğinden fonksiyon, limit, türevin

uygulamaları, integral gibi konularda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının konu alanı bilgilerine yönelik nicel ve nitel araştırmalar yapılabilir. Öğretmenlerin türeve yönelik konu alanı bilgileri görüşme, gözlem ve döküman incelemesi gibi birden fazla nitel veri toplama aracı kullanılarak araştırılabilir. Öğretmenlerin türeve yönelik konu alanı bilgi düzeylerini arttırmak amacıyla düzey belirlendikten sonra mikroöğretim yoluyla daha kalıcı ve sağlıklı öğrenmeler gerçekleştirilebilir.

Kaynaklar

- Akkoç, H., Yeşildere, S., & Özmantar, F. (2007). Prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of definite integral: The problem of limit process. In D. Küchemann (Ed.), *Paper Presented at the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 7-12).
- Alev, N., & Karal, I.S. (2013). Fizik öğretmenlerinin elektrik ve manyetizma konularına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin belirlenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(2), 88-108.
- Altaylı, D., Konyalıoğlu, A.C., Hızarcı, S., & Kaplan, A. (2014). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının üç boyutlu cisimlere ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 10, 4-24.
- Amoah, V., & Laridon, P. (2004). Using multiple representations to assess students' understanding of the derivative concept. *BSRLM*, 24(1), 1-6.
- Arslan Kılcan, S. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerle bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu, Türkiye.
- Artigue, M. (1991). Analysis. In I.D. Tall & S. Vinner (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academics.
- Aydın, N., & Erbaş, K. (2011). *Ortaöğretim matematik 12*. Ankara: Aydın Yayınları.
- Balcı, M. (1999). *Matematik analiz*. Ankara: Balcı Yayınları.
- Ball, D.L., & McDiarmid, G.W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In R. Houston (Eds.), *Handbook for research on teacher education* (pp. 437-449). New York: Macmillan.
- Batur, Z., & Balcı, S. (2013). Türkçe öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(11), 21-43.
- Bennett, S.N., & Turner-Bisset, R.A. (1993). Case studies in learning to teach. In S.N. Bennett & C.G. Carre (Eds.), *Learning to teach* (pp. 165-190). London and New York: Routledge.

- Bezuindenhout, J. (1998). First year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29, 389-399.
- Bingölbalı, E. (2013). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. In M.F. Özmentar, E. Bingölbalı & H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri* (s. 223-255). Ankara: Pegem Akademi.
- Burton, M. (1989). The effect of prior calculus experience in "introductory" college calculus. *American Mathematical Monthly*, 96, 350-354.
- Canbazoğlu, S., Demirelli, H., & Kavak, N. (2010). Fen bilgisi öğretmen adaylarının maddenin tanecikli yapısı ünitesine ait konu alanı bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkilerin incelenmesi. *İlköğretim Online*, 9(1), 275-291.
- Cohen, D.K., McLaughlin, M.W., & Talbert, J.E. (1993). *Teaching for understanding: Challenges for policy and practice*. San Francisco: Jossey-Boss.
- Çakmak, Z., Konyalıoğlu, A.C., & Işık, A. (2014). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının üç boyutlu cisimlere ilişkin konu alanı bilgilerinin incelenmesi. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 8, 28-44.
- Çakımcı, T., & Kabasakal, V. (2016). *Ortaöğretim ileri düzey matematik 12*. Ankara: Nova Yayıncılık.
- Çarhoğlu, M.A., & Gezmiş, A.T. (2015). *Ortaöğretim matematik 12 ders kitabı*. Ankara: Ada Matbaacılık.
- Çepni, S. (2012). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (6.Basım). Trabzon: Celepler Matbaacılık.
- Çetinkaya, B., Erbaş, A.K., & Alacalı, C. (2013). Değişim oranı olarak türev ve tarihsel gelişimi. In İ.Ö. Zembat, M.F. Özmentar, E. Bingölbalı, H. Şandır & A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (ss. 529-555). Ankara: Pegem Akademi.
- Dani, D.E. (2004). *The impact of content and pedagogy courses on science teachers' pedagogical content knowledge*. Unpublished doctoral dissertation, University of Cincinnati, Cincinnati, USA.
- Daymon, C., & Holloway, I. (2003). *Qualitative research methods in public relations and marketing communications*. London: Routledge.
- Demir, H. (2014). *Teori ve problemleriyle Analiz-1*. Ankara: Pegem Akademi.
- Duru, A. (2006). *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar*. Yayımlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.
- Ekiz, D. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Erdem, M. (2005). *Öğretmenlik mesleğine giriş*. İstanbul: Epsilon Yayıncılık.

- Ferrini Mundy, J., & Graham, K.G. (1991). An overview of the calculus reform effort: Issues for learning, teaching and curriculum development. *American Mathematical Monthly*, 98(7), 627-635.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concept. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Gess Newsome, J. (1999). Pedagogical content knowledge: an introduction and orientation. In Gess Newsome, J. & Lederman, N.G. (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 3-17). London: Kluwer Academics.
- Glesne, C. (2013). *Nitel araştırmaya giriş*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Gökbulut, Y. (2010). *Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusundaki pedagojik alan bilgileri*. Yayınlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Gökkurt, B. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., & Soylu, Y. (2012). Matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 5(8), 997-1012.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., & Doğan, Y. (2015). Öğretmen adaylarının geometrik cisimler konusuna ilişkin öğretmen hatalarına yönelik pedagojik alan bilgileri. *İlköğretim Online*, 14(1), 55-71.
- Grossman, P.L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
- Gürler, C., & Yılmaz, N. (2016). *Matematik 12 temel düzey ders kitabı*. Ankara: Aydın Yayınları.
- Halim, L., & Meerah, S.M. (2002). Science trainee teachers' pedagogical content knowledge and its influence on physics teaching. *Research in Science and Technological Education*, 20(2), 215-226.
- Hawkins, W.J. (2012). An investigation of primary teachers' pedagogical content knowledge when teaching measurement to years three and four. *Paper Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education*, Seoul, South Korea.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Eds.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions*. Unpublished doctoral dissertation, Middle East of Technical University, Ankara, Turkey.
- James, M.D. (1995). *Should calculus be taught in high school and if so how should it be taught?* <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT705/EMT705.James.html> internet adresinden 09, 02, 2016 tarihinde edinilmiştir.
- Kadıoğlu, E., & Kamalı, M. (2009). *Genel matematik*. Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.
- Käpylä, M., Heikkinen, J.P., & Asunta, T. (2009). Influence of content knowledge on pedagogical content knowledge: The case of teaching photosynthesis and plant growth. *International Journal of Science Education*, 31(10), 1395-1415.
- Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV construct. *ZDM Mathematics Education*, 40, 873-892.
- Konyalıoğlu, A.C. (2003). *Üniversite düzeyinde vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.
- Lannin, J.K., Webb, M., Chval, K., Arbaugh, F., Hicks, S., Taylor, C., & Bruton, R. (2013). The development of beginning mathematics teacher pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 403-426.
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41, 3-11.
- Marvasti, A.B. (2004). *Qualitative research in sociology*. London: Sage Publication.
- Miles, M.B., & Huberman, M.A. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis*. London: Sage Publication.
- O'Callaghan, B.R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 21-40.
- Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.
- Patton, M. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Beverly Hills, CA: Sage Publication.
- Roberts, P., & Priest, H. (2006). Reliability and validity in research. *Nursing Standard*, 20, 41-45.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-21.

- Shulman, L. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. In M. Wittrock (Eds.), *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillian Publishing Company.
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tavşancıl, E., & Aslan, E. (2001). *İçerik analizi ve uygulama örnekleri*. İstanbul: Epsilon Yayıncılık.
- Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., & Giordano F.R. (2009). *Thomas' calculus* (11.Basım). (Çev: Recep Korkmaz). Boston: Pearson Education.
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2010). Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. *Paper presented at the CERME 6*, (pp. 1941-1950), January 28th-February 1st, Lyon, France.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95.
- Türnüklü, E. (2005). Matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgileri ile matematiksel alan bilgileri arasındaki ilişki. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, 5(21), 234-247.
- Twycross, A., & Shields, L. (2005). Validity and reliability-what's it all about?: Part 3 issues relating to qualitative studies. *Pediatric Nursing*, 17, 36.
- Ubuz, B. (1996). *Evaluating the impact of computers on the learning and teaching of calculus*. Unpublished doctoral dissertation, University of Nottingham, Nottingham, United Kingdom.
- Veal, W.R., Tippins, D.J., & Bell, J. (1998). The evolution of pedagogical content knowledge in prospective secondary physics teachers. *Paper Presented at the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching*. San Diego CA, USA.
- Viholainen, A. (2006). Why is a discontinuous function differentiable?. *Paper Presented at the 30th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 329-336). Prague, Czechia.
- Viveros, K., & Sacristan, A. (2002). College students' conceptual links between the continuity and the differentiability of a function. *Paper Presented at the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (24th Athens, Georgia, October 26-29). 1-4, 350-360.
- Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of a function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-213). Washington, DC: Mathematical Association of America.

- Weber, K., Porter, M., & Housman, D. (2008). Worked examples and conceptual usage in understanding mathematical concepts and proofs. In M.P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 245-252). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Yağcı, M. (2014). *My matematik 3*. İzmir:Altın Nokta Yayınevi.
- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 29(1), 125-149.
- Yıldırım, K. (2010). Nitel araştırmalarda niteliği artırma. *İlköğretim Online*, 9(1), 79-92.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013).*Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9.Basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldız, N. (2006). *Matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili sorulmuş bazı etkin sorular ve cevapları hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri üzerine bir fenomenografik çalışma*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Yılmaz, N.P. (2016). ICT student teachers' pedagogical content knowledge: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(1), 133-152.
- Yin, R.K. (1994). *Case study research: design and methods* (2nd Edition). Beverly Hills, CA: Sage Publication.
- Yusof, Y.M., & Zakaria, E. (2010). Investigating secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge: A case study. *Journal of Education and Sociology*, 32-39.
- Zandieh, M.J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 103-126). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Zandieh, M.J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University, Corvallis, USA.
- Zazkis, R., & Leiken, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 131-148.

Extended Summary

Purpose

Unlike high school teachers, studies for pedagogical content knowledge were often examined with prospective mathematics teachers in the literature. In spite of taking course for the formation towards teaching profession and doing internship at schools during undergraduate education, prospective mathematics teachers do not gain experience sufficiently. Therefore, the informations obtained from the prospective mathematics teachers can't allow to be determined the pedagogical content knowledge in the context of subject matter knowledge of high school mathematics teachers. Thus, the present study was conducted with the teachers in the teaching profession in person and involved in the teaching process. The purpose of this study is to investigate high school mathematics teachers' pedagogical content knowledge in the context of subject matter knowledge on the definition of derivative, the visualization of the definition of derivative, and the relationship between derivative and continuity. The four sub-problems conformed with the overall purpose of this study are described as follows:

1. What are the efficacy perceptions of high school mathematics teachers for the subject matter knowledge on derivatives?
2. What are the levels of high school mathematics teachers to define derivative and give examples to derivatives from everyday life?
3. What are the levels of high school mathematics teachers to visualize the definition of derivatives?
4. What are the levels of high school mathematics teachers to explain the relationship between derivatives and continuity?

Method(s)

The case study design of the qualitative research models was used in this research. The research was carried out in a small-scaled city of the Black Sea Region of Turkey during the fall semester of 2015-2016 academic terms. The participants of the research were four mathematics teachers working in public high schools connected to the ministry of national education. The maximum variation sampling of purposeful sampling method was used when determining the teachers to join the study. The data collection tool was a semi-structural interview protocol developed by the researchers. The studies examining derivatives and pedagogical content knowledge were considered in the development process of the interview protocol. The research data was analyzed by content analysis. The researchers considered the framework specified by Zazkis and Leiken (2008) and then expanded by Gokkurt (2014) in the identification process under categories and encodes of the data obtained defining derivatives, giving examples to derivatives, visualizing the definition of derivative and explaining the relationship between derivatives and continuity.

Results

When the high school teachers' detailed definitions to derivatives were examining, all teachers had necessary but not sufficient definitions for derivatives. When the teachers' detailed examples to derivatives from everyday life were examining, these examples have prototype features such as instantaneous change, rate of change and exchange ratio. All given examples by the teachers are included in the field of academical instruction and mathematics education books. However, the examples such as instantaneous change, rate of change given by O₁, O₂ and O₄ teachers and again the examples such as exchange ratio given by O₁ are incomplete and not fully accurate examples. On the other hand, it is just an example of a non prototype given by O₃ teacher. When the teachers' detailed drawing examples for the definition of derivatives were examining, all examples drawn by the teachers are the prototype drawings included in the field of mathematics textbooks and academical instruction books. The drawings made by O₁ and O₂ teachers are related to the relationship between derivative and rate of change. The drawings made by O₃ and O₄ teachers are related to the relationship between derivative and slope. When the teachers' detailed views for the relationship between derivatives and continuity were examining, the statements made and the examples given by O₁ and O₂ teachers are at the sufficient level. Accordingly, O₁ and O₂ teachers explained the derivatives-continuity relationship and done the right drawing examples for this relationship. On the other hand, O₃ and O₄ teachers expressed necessary but insufficient critical features related to the derivatives-continuity relationship.

Conclusions and Discussions

The function has a significant impact in understanding the concepts of limit, continuity and derivatives. Teachers should pay attention to the preconditionality principle in explaining the issue. It should focus on the function and limit concepts intensively to tell without possibility of misconception the relationship between derivatives and continuity accurately. The present study was conducted with high school mathematics teachers. Hence, the qualitative and quantitative studies may be done related to the subject matter knowledges of the mathematics teachers and preservice mathematics teachers in the issues such as the function, limit, applications of derivatives and integration. The teachers' subject matter knowledges for derivatives may be investigated with the help of more data collection tools such as the interviews, observations and document review in qualitative studies. In order to increase the levels of the teachers' subject matter knowledges, more permanent learnings are carried out through micro teaching at the end of the final evaluation.

* * * *