

PAPER DETAILS

TITLE: SOME PROPERTIES OF b -WEAKLY COMPACT OPERATORS

AUTHORS: Birol ALTIN

PAGES: 391-395

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/83314>

SOME PROPERTIES OF b-WEAKLY COMPACT OPERATORS

Birol ALTIN

Gazi University, Faculty of Sciences and Arts, Department of Mathematics, 06500- Teknikokullar,
Ankara, TURKEY, email: birola@gazi.edu.tr

ABSTRACT

In this study it is obtained some properties of b-weakly compact operators. Moreover, it is given a characterization of quotient Riesz space with b-property.

Key Words: Riesz spaces with b-property, b-weakly compact operators, KB-spaces.

b-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu çalışmada b-zayıf kompakt operatörlerin bazı özellikleri elde edildi. Ayrıca b-özellğine sahip bölüm Riesz uzayları için bir karakterizasyon verildi.

Anahtar Kelimeler: b-özellğine sahip Riesz uzayları, b-zayıf kompakt operatörler, KB-uzayları.

1. GİRİŞ

E bir Riesz uzayı, E' ise E uzayının ikinci sıra duali olsun. E uzayından E' uzayı içine kanonik gömme $Q_E : E \rightarrow E'$, $Q_E(x) = \hat{x}$; $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in E'$, $x \in E$ biçiminde tanımlı Q_E operatörü her zaman bir örgü homomorfizması olur (1 Theorem 5.4). Ayrıca bunun yanında Eğer E' , E' nin noktalarını ayırıyor ise Q_E ' nin birebir olduğu görülür. Bundan dolayı E Riesz uzayına E' Riesz uzayının Riesz altuzayı olarak bakılır. Bu çalışmada E' nin E' nin noktalarını ayırdığı kabul edilecektir. Riesz uzaylar ile ilgili temel tanım ve notasyonlar (1) de bulunabilir.

Tanım 1.1 E bir Riesz uzayı ve $A \subset E$ olsun. Eğer A kümesi E' içinde sıra sınırlı oluyor ise A kümesine E içinde bir b-sıra sınırlı küme denir. E Riesz uzayının her b-sıra sınırlı kümesi E içinde sıra sınırlı oluyorsa da, E uzayına b-özellğine sahip Riesz uzayı denir (2).

E bir Riesz uzayı olsun. E'nin b-özellğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, E içindeki $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, $x'' \in E'$ koşulunu sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağının E uzayı içinde üstten sınırlı olmasıdır (2). Bu çok kullanışlı olan sonuç önerme ve iddiaların ispatında kolaylık sağlar.

Örnekler 1.2 Bir E Riesz uzayının sıra duali b-özellğine sahiptir, bütün KB-uzayları b-özellğine sahiptir, K kompakt, Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere $C(K)$ uzayı b-özellğine sahiptir. Diğer taraftan sıfıra yakınsak reel terimli dizilerin uzayı c_0 b-özellğine sahip değildir (2).

Banach örgülerinin yönlendirilmiş kümeler için zayıf Fatou özelliği b-özellğini gerektirir, Frechet örgülerinde Levi özelliği ve Zaanen'in B-özellliği'nde b-özellğini

1. INTRODUCTION

Let E be a Riesz space and E' be bidual of E. The canonical embedding $Q_E : E \rightarrow E'$ defined by $Q_E(x) = \hat{x}$; $\hat{x}(f) = f(x)$, $f \in E'$, $x \in E$ is a lattice homomorphism (1 Theorem 5.4). If E' separates of E, then Q_E is also one-to-one and hence, E can be considered as a Riesz subspace of E' . We will assume all Riesz spaces considered in this note have separating order duals. In all undefined terminology concerning Riesz spaces we will adhere to (1).

Definition 1.1 Let E be a Riesz space and $A \subset E$. If A is order bounded in E' we call A, b-order bounded in E. A Riesz space E is said to have b-property if each subset A of E which is order bounded in E' is order bounded in E (2).

A Riesz space E has b-property-b if and only if for each net $\{x_\alpha\}$ in E satisfying $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, $x'' \in E'$ is order bounded in E (2).

Examples 1.2 Every order dual of a Riesz space has b-property, every KB-space has b-property, for an arbitrary compact Hausdorff space K, $C(K)$ has b-property. On the other hand c_0 , Riesz space of all real convergent sequences to zero, does not have b-property (2).

The weak Fatou property for directed sets of Banach lattices imply the b-property. The Levi property and Zaanen's property imply the b-property in Frechet lattices (2).

Definition 1.3 An operator $T : E \rightarrow X$, from a Banach lattice into a Banach space is said to be b-weakly compact operator whenever T carries the each b-order bounded subset of E into relatively weakly compact subset of X (2).

gerektirir (2).

Tanım 1.3 E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı ve $T : E \rightarrow X$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü E uzayının b -sıra sınırlı kümelerini X uzayının relatif zayıf kompakt alt kümesine dönüştürüyorsa T operatörüne bir b -zayıf kompakt operatör denir (2).

Bir E Banach örgüsünden X Banach uzayı içine tanımlanan bütün b -zayıf operatörlerin uzayını $W_b(E, X)$, sıra zayıf kompakt operatörlerin uzayını $W_o(E, X)$, zayıf kompakt operatörlerin uzayını $W(E, X)$ ile göstereceğiz. Ayrıca E uzayından X içine sürekli operatörlerin uzayı da $L(E, X)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $W(E, X) \subseteq W_b(E, X) \subseteq W_o(E, X)$ kapsamaları sağlanır (2).

Aşağıdaki örnek yukarıdaki kapsamaların öz olabileceğini gösterecektir.

Örnek 1.4 (a) $I : L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$ özdeşlik dönüşümünü göz önüne alalım. I bir b -zayıf kompakt operatör olmasına karşın bir zayıf kompakt operatör değildir.

(b) $I : c_0 \rightarrow c_0$ özdeşlik dönüşümü bir sıra zayıf kompakt operatör olmasına karşın bir b -zayıf kompakt operatör değildir (2).

E ve F iki Riesz uzayı $T, S : E \rightarrow F$ iki operatör olsun. Her bir $x \in E$ için $|S(x)| \leq T(|x|)$ sağlanıyor ise T operatörüne S operatörünü sınırlıyor denir.

2. TEMEL SONUÇLAR

c_0 uzayı üzerinde tanımlı özdeşlik dönüşümü bir sürekli operatör olmasına karşın bir b -zayıf kompakt operatör değildir. Aşağıda önerme sürekli operatör uzayı ile b -zayıf kompakt operatörler uzayının ne zaman çakışacağını karakterize edecektir.

Önerme 2.1 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) E bir KB-uzayıdır.
- (ii) Her F Banach örgüsü için $L(E, F) = W_b(E, F)$ olur.

İspat. E bir KB-uzayı, $T : E \rightarrow F$ bir sürekli operatör ve A , E uzayının bir b -sıra sınırlı alt kümesi olsun. Her bir KB-uzayı b -özellğine sahip olduğundan E uzayı b -özellğine sahip olur (2). Böylece $A \subset [-x, x]$ olacak şekilde E uzayının bir pozitif x elemanı vardır. E uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan $[-x, x]$ sıra aralığı E uzayının bir zayıf kompakt altkümesi olur. (1 Önerme 12.9). $T : E \rightarrow F$ nin zayıf sürekli operatör olduğu dikkate alınırsa, $T(A)$ kümesinin F uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesi olacağı sonucuna varılır (1 Teorem 17.1). Yani $L(E, F) \subset W_b(E, F)$ dir. Diğer taraftan $W_b(E, F) \subset L(E, F)$ kapsaması her zaman gerçekleştiğinden $L(E, F) = W_b(E, F)$ elde edilir (2).

Şimdi her F Banach örgüsü için $L(E, F) = W_b(E, F)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman $I : E \rightarrow E$

The collection of b -weakly compact operators will be denoted by $W_b(E, X)$, the collection of order weakly compact operators will be denoted by $W_o(E, X)$, The collection of weakly compact operators will be denoted by $W(E, X)$ and collection of continuous operators from E into X will be denoted by $L(E, X)$. Clearly, we have $W(E, X) \subseteq W_b(E, X) \subseteq W_o(E, X)$ (2).

We give examples to show that these inclusions may be proper.

Example 1.4 (a) Consider the identity operator $I : L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$. I is b -weakly compact. But it is not weakly compact.

(b) Consider the identity operator $I : c_0 \rightarrow c_0$. I is an order weakly compact. But it is not a b -weakly compact operator (2).

Let E, F be two Riesz spaces and let T, S be two operators from E into F . It is said that S is dominated by another operator T if $|S(x)| \leq T(|x|)$ for each $x \in E$.

2. MAIN RESULTS

Although the identity operator on c_0 is continuous, but it is not b -weakly compact. The following proposition characterizes when the vector space of all continuous operators from a Banach lattice into Banach space equals to vector space of all b -weakly compact operators.

Proposition 2.1 Let E be a Banach lattice. Then the following statements are equivalent:

- (i) E is a KB-space,
- (ii) $L(E, F) = W_b(E, F)$ for each Banach space F .

Proof. Let E be a KB-space, let F be a Banach space and let T be a continuous operator from E into F , and A be a b -order bounded subset of E . Since every KB-space has b -property A is order bounded in E (2). So, there exists a positive element x in E with $A \subset [-x, x]$. From E has order continuous norm the order interval $[-x, x]$ is a relatively weakly compact subset of E (1 Proposition 12.9). Since T is a continuous operator, $T(A)$ is a relatively weakly compact subset of F (1 Theorem 17.1). So, $L(E, F) \subset W_b(E, F)$. On the other hand, $W_b(E, F) \subset L(E, F)$ is satisfied (2). Hence, $L(E, F) = W_b(E, F)$.

Now we assume that $L(E, F) = W_b(E, F)$ for every Banach space F . Then the identity operator $I : E \rightarrow E$ is a b -weakly compact operator. So, E is a KB-space (2 Proposition 2.10).

özdeşlik dönüşümü bir b -zayıf kompakt operatör olur. Böylece E bir KB- uzayı olur (2 Önerme 2.10).

Önerme 2.2 E ve F iki Banach örgüleri, $S, T: E \rightarrow F$ operatörler ve T operatörü S operatörünü sınırlasın. Eğer T operatörü bir b -zayıf kompakt operatör ise S de bir b -zayıf kompakt operatör olur.

İspat. E uzayında herhangi bir b -sıra sınırlı dik dizisi $\{x_n\}$ olsun. Her bir n doğal sayısı için $x_n = x_n^+ - x_n^-$ olur (1). Ayrıca $\{x_n^+\}$ ve $\{x_n^-\}$ dizileri de dik ve b -sıra sınırlı olur. Ayrıca T operatörü S operatörünü sınırladığından $0 \leq |S(x_n^+)| \leq T(x_n^+)$, $0 \leq |S(x_n^-)| \leq T(x_n^-)$ bağıntıları elde edilir. Böylece, $0 \leq |S(x_n)| = |S(x_n^+ - x_n^-)| \leq |S(x_n^+)| + |S(x_n^-)| \leq T(x_n^+) + T(x_n^-)$ bulunur. Bunun yanında T operatörü b -zayıf kompakt operatör olduğundan $\lim_n T(x_n^+) = 0$ ve $\lim_n T(x_n^-) = 0$ bulunur (2 Önerme 2.8). Bu ise $\lim_n |S(x_n)| = 0$ olduğunu gösterir. Böylece S nin bir b -zayıf kompakt operatör olduğu elde edilir.

Önerme 2.3 E, F iki Banach örgüsü, E sıra sürekli norma sahip, $T: E \rightarrow F$ bir b -zayıf kompakt operatör ve B ise E uzayının E'' uzayının içinde doğurduğu band olsun. Bu durumda $T': (F', w^*) \rightarrow (E', \sigma(E', B))$ operatörü sürekli olur.

İspat. F' uzayı içinde w^* -topolojisine göre $x'_\alpha \rightarrow 0$ yakınsamasını sağlayan bir $\{x'_\alpha\}$ dizisi ile $x'' \in B$ alalım. T bir b -zayıf kompakt operatör ve E sıra sürekli norma sahip olduğundan $T''(B) \subset F$ olur (2 Önerme 2.11). Böylece $x''(T(x'_\alpha)) = \langle T'(x'_\alpha), x'' \rangle = \langle x'_\alpha, T''(x'') \rangle \rightarrow 0$, sağlanacağından $(E', \sigma(E', B))$ topolojik uzayında $T'(x'_\alpha) \rightarrow 0$ yakınsaması sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 2.4 Eğer bir E Riesz uzayı b -özellğine sahip ise c_0 , E uzayının bir sıra kapalı Riesz uzayına Riesz izomorfik olamaz.

İspat. E Riesz uzayı b -özellğine sahip ve c_0 ında, E uzayının bir U sıra kapalı Riesz uzayına Riesz izomorfik olduğunu kabul edelim. Bu durumda U Riesz alt uzayı'nda b -özellğine sahip olur (3). Dolayısıyla c_0 uzayının b -özellğine sahip olacağı çelişkinine ulaşılır. Yani c_0 , E Riesz alt uzayına Riesz izomorfik olamaz.

E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir sıra ideali olsun. E/A bölüm uzayı E içindeki x elemanlarının $\dot{x} = x + A$ biçimindeki denklik sınıflarından oluştuğu biliniyor. E/A bölüm uzayı,

$\forall \dot{x}, \dot{y} \in E/A$ çifti için $\dot{x} \leq \dot{y} \Leftrightarrow \exists x_1 \in \dot{x}, \exists y_1 \in \dot{y} \ni x_1 \leq y_1$ sıralaması ile bir Riesz uzayı olur (1 Teorem 7.10).

Şimdi bölüm uzaylarının b -özellğine sahip olmasını karakterize edecek olan aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.5 E bir Riesz uzayı B ise E Riesz uzayının bir

Proposition 2.2 Let $S, T: E \rightarrow F$ be two operators between two Banach lattices and let S be dominated by T . If T is a b -weakly compact operator, then S is also a b -weakly compact.

Prof. Let $\{x_n\}$ be a disjoint sequence of E . We have $x_n = x_n^+ - x_n^-$ for each $n \in \mathbb{N}$. So $\{x_n^+\}$ and $\{x_n^-\}$ are two disjoint sequences. Since S is dominated by T , $0 \leq |S(x_n^+)| \leq T(x_n^+)$, $0 \leq |S(x_n^-)| \leq T(x_n^-)$, $0 \leq |S(x_n)| = |S(x_n^+ - x_n^-)| \leq |S(x_n^+)| + |S(x_n^-)| \leq T(x_n^+) + T(x_n^-)$ are obtained. On the other hand, Since T is a b -weakly compact operator, we have $\lim_n T(x_n^+) = 0$ and $\lim_n T(x_n^-) = 0$ (2 Proposition 2.8). Therefore, $\lim_n |S(x_n)| = 0$. Hence, we obtain S is a b -weakly compact.

Proposition 2.3 Let E, F be two Banach lattice with F has order continuous norm and let T be a weakly compact operator from E into F , and B denote the band generated by E in E'' then $T': (F', w^*) \rightarrow (E', \sigma(E', B))$ is continuous.

Proof. Let $x'_\alpha \xrightarrow{w^*} 0$ in F' and let $x'' \in B$. Since T is b -weakly compact and E has order continuous norm, we have $T''(B) \subset F$ (2 Proposition 2.11). Therefore, $x''(T(x'_\alpha)) = \langle T'(x'_\alpha), x'' \rangle = \langle x'_\alpha, T''(x'') \rangle \rightarrow 0$. It gives us $T'(x'_\alpha) \rightarrow 0$ $(E', \sigma(E', B))$ and the proof of the proposition is finished.

Riesz spaces with b -property does not contain any order closed sublattice isomorphic to c_0 .

Proposition 2.4 Let E be a Riesz space with b -property. Then c_0 is not Riesz isomorphic to any order closed Riesz subspace of E .

Proof. Let E has b -property and c_0 is a Riesz isomorphic to an order closed Riesz subspace U of E . Then U has b -property (3). Hence, c_0 has b -property. We have thus arrived at a contradiction.

Let E be a Riesz space and let A be an order ideal of E . It is well known that the quotient vector space E/A is a Riesz space under the order relation

$$\dot{x} \leq \dot{y} \Leftrightarrow \exists x_1 \in \dot{x}, \exists y_1 \in \dot{y} \ni x_1 \leq y_1 \quad (1 \text{ Theorem 7.10}).$$

Now we give the following lemma characterizes when quotient vector spaces has b -property.

Proposition 2.5 Let E be a Riesz space and B be a projection band of E . Then the quotient Riesz space E/B and B have b -property if and only if E has b -property.

Proof. Let E be a Riesz space and let B be a projection band of E . Then $E = B \oplus B^d$. Since every element $x \in E$ has a unique decomposition $x = x_1 + x_2$ where $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$. E and $B \times B^d$ are Riesz isomorphic. On the other hand, B^d and E/B are Riesz isomorphic. Now let B and

projeksiyon bandı olsun. E/B bölüm uzayı ve B bandının b -özellğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul, E Riesz uzayının b -özellğine sahip olmasıdır.

İspat. E bir Riesz uzayı ve B , E Riesz uzayının bir projeksiyon bandı olsun. O zaman $E = B \oplus B^d$ olur. Her bir $x \in E$ için $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ biçiminde tek türlü yazılabildiğinden, E Riesz uzayı $B \times B^d$ kartezyen çarpım uzayına örgü izomorfiktir. Ayrıca B^d

Riesz uzayı da E/B Riesz uzayına örgü izomorfiktir. B ve B^d Riesz uzayları b -özellğine sahip ve E uzayının $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, $x'' \in E^\sim$ koşulunu sağlayan bir $\{x_\alpha\}$ ağı verilsin. $\{x_\alpha\}$ ağı $B \times B^d$ kartezyen çarpımına ait olduğundan $X_\alpha = (y_\alpha, z_\alpha)$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subset B$ ve $(z_\alpha) \subset B^d$ ağıları vardır. Şimdi, $0 \leq f \in B^\sim$ ve $0 \leq g \in (B^d)^\sim$ verilsin. $\forall z = (x, y) \in E$ için,

$$\hat{f} : E \rightarrow \mathbb{R}, z \rightarrow \hat{f}(z) = f(x),$$

$$\hat{g} : E \rightarrow \mathbb{R}, z \rightarrow \hat{g}(z) = g(y),$$

biçiminde tanımlı $\hat{f}, \hat{g}$ fonksiyonelleri $(E^\sim)^+$ ya aittir.

$0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$ bağıntısı $E^\sim$ içinde sağlandığından,

$$0 \leq f(y_\alpha) = \hat{f}(x_\alpha) \leq x''(\hat{f}), \quad 0 \leq g(z_\alpha) = \hat{g}(x_\alpha) \leq x''(\hat{g})$$

elde edilir. Buradan,

$\hat{y} : (B^\sim)^+ \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \sup_\alpha f(y_\alpha)$ biçiminde tanımlı $\hat{y}$ dönüşümünün toplamsal olduğu görülür. Dolayısıyla $\hat{y}$ dönüşümü $B^\sim$ uzayının tamamına genişler (1 Teorem 1.7). Bu genişleme yine $\hat{y}$ ile gösterilirse $0 \leq y_\alpha \uparrow \leq \hat{y}$ bağıntısı $B^\sim$ da sağlanır. B uzayı b -özellğine sahip olduğundan B uzayının $0 \leq y_\alpha \leq y$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Benzer düşünce ile B^d b -özellğine sahip olduğundan $0 \leq z_\alpha \leq z$ olacak şekilde B^d uzayının bir z elemanı vardır. Böylece $x = (y, z)$ elemanı E uzayına ait olur ve $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ bağıntısı sağlanır. Yani E uzayı b -özellğine sahip olur.

Tersine E b -özellğine sahip ve $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, $x'' \in B^\sim$ ve $0 \leq y_\alpha \uparrow \leq y''$, $y'' \in (B^d)^\sim$ koşullarını sağlayan $\{x_\alpha\} \subset B$ ve $\{y_\alpha\} \subset B^d$ ağıları ve $E^\sim$ uzayının keyfi bir pozitif f fonksiyoneli verilsin. $\forall x \in B$ için $f_1 : B \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f_1(x) = f(x, 0)$ biçiminde tanımlı f_1 fonksiyoneli $(B^\sim)^+$ ya aittir ve $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$ bağıntısından $0 \leq f(x_\alpha, 0) = f_1(x_\alpha) \leq x''(f_1) < \infty$ elde edilir. Buradan $\forall f \in (E^\sim)^+$

$\hat{z} : (E^\sim)^+ \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \sup_\alpha f_1(y_\alpha)$ biçiminde tanımlı $\hat{z}$ nın bir toplamsal dönüşüm olduğu elde edilir ve

B^d have b -property and given a net $\{x_\alpha\}$ in E with $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, $x'' \in E^\sim$. Hence there exist a net $\{y_\alpha\}$ in B and a net $\{z_\alpha\}$ in B^d such that $x_\alpha = (y_\alpha, z_\alpha)$. Given a positive functional f in $B^\sim$ and a positive functional g in $(B^d)^\sim$. Consider two functional,

$$\hat{f} : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ defined by } \hat{f}(z) = f(x) \text{ and}$$

$$\hat{g} : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ defined by } \hat{g}(z) = g(y) \text{ for every}$$

$$z = (x, y) \in E. \text{ Clearly } \hat{f}, \hat{g} \in (E^\sim)^+. \text{ Since}$$

$0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$ in $E^\sim$, we have $0 \leq f(y_\alpha) = \hat{f}(x_\alpha) \leq x''(\hat{f})$, $0 \leq g(z_\alpha) = \hat{g}(x_\alpha) \leq x''(\hat{g})$. Hence it is seen that $\hat{y} : (B^\sim)^+ \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $f \rightarrow \sup_\alpha f(y_\alpha)$ is additive. So, it extends uniquely to a positive functional from $B^\sim$ into $\mathbb{R}$ (1 Theorem 1.7). The unique extension denoted by $\hat{y}$ again is satisfied $0 \leq y_\alpha \uparrow \leq \hat{y}$ in $B^\sim$. Since B has b -property, there exists a positive element y in B such that $0 \leq y_\alpha \leq y$ in E . On the other hand there

exist a positive element z in B^d such that $0 \leq z_\alpha \leq z$ in B^d . So the element $x = (y, z)$ belongs to E and satisfies $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$. This implies E has b -property.

Conversly, let E be have b -property and given two nets $\{x_\alpha\} \subset B$ and $\{y_\alpha\} \subset B^d$ with $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, $x'' \in B^\sim$ and $0 \leq y_\alpha \uparrow \leq y''$, $y'' \in (B^d)^\sim$. Let f be a positive functional on $E^\sim$. Using this functional define functional f_1 , by $f_1 : B \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f_1(x) = f(x, 0)$. Thus $f_1 \in (B^\sim)^+$ and from the inequalities $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$ we have $0 \leq f(x_\alpha, 0) = f_1(x_\alpha) \leq x''(f_1) < \infty$. So, it is seen that $\hat{z} : (E^\sim)^+ \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $f \rightarrow \sup_\alpha f_1(y_\alpha)$ is additive. Hence, $0 \leq (x_\alpha, 0) \leq \hat{z}$ in $E^\sim$. Since E has b -property, there exists a element (x, y) in E with $0 \leq (x_\alpha, 0) \leq (x, y)$. This implies B has b -property. Using the same idea we obtain B^d has

b -property.

Let E and F be two Banach lattices and let $L_b(E, F)$ denote the vector space of all order bounded operator from E into F . then the inclusion $L_b(E, F) \subset L(E, F)$ holds every time (4). However the converse is not true in general. For instance, let us consider the operator $T : C[0, 1] \rightarrow c_0$ defined by $T(f) = (f(1/n) - f(0))$, $f \in C[0, 1]$. Clearly, T is continuous but it is not order bounded.

Proposition 2.6. Let E be a Banach lattice and F be an AM-space. Then $L_b(F', E') = L(F', E')$.

$0 \leq (x_\alpha, 0) \leq \hat{z}$ sıralaması $E^{\sim}$ içinde sağlanır. E uzayı b -özellğine sahip olduğundan $0 \leq (x_\alpha, 0) \leq (x, y)$ olacak şekilde E uzayının bir (x, y) elemanı vardır. Bu da B uzayının b -özellğine sahip olduğunu verecektir. Benzer düşünce ile B^d uzayının da b -özellğine sahip olduğu görülür.

E ve F herhangi iki Banach örgüsü olsun. E ve F arasındaki sıra sınırlı operatörlerin uzayını $L_b(E, F)$ ile sürekli operatörlerin uzayı $L(E, F)$ olmak üzere $L_b(E, F) \subset L(E, F)$ kapsaması her zaman sağlanır (4). Ancak bu kapsama bazen öz olabilir. Örneğin,

$$T : C[0, 1] \rightarrow c_0; \quad T(f) = (f(1/n) - f(0)), \quad \forall f \in C[0, 1],$$

biçiminde tanımlanan T bir sürekli operatördür ancak bir sıra sınırlı operatör değildir.

Önerme 2.6 E bir Banach örgüsü ve F ise bir AM-uzayı olsun. O zaman $L_b(F', E') = L(F', E')$ eşitliği sağlanır.

İspat. E bir Banach örgüsü ve F bir AM-uzayı olsun. $E' = E^{\sim}$ ve $E^{\sim}$ b -özellğine sahip olduğundan E' uzayı b -özellğine sahip olur. Diğer yandan F' de bir AL-uzayı olur (1). Böylece $L_b(F', E') = L(F', E')$ eşitliği elde edilir (2 Önerme 2.2).

Sonuç 2.7 E bir Banach örgüsü, F bir AM-uzayı ve $T : E \rightarrow F$ ise bir sürekli operatör olsun. Bu durumda $T' : F' \rightarrow E'$ sürekli eşlek operatörü sıra sınırlıdır.

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., Positive Operators, **Academic Press**, New York and London, (1985).
2. Alpay, Ş., Altın, B., Tonyalı, C., "On property (b) of vector lattices", **Positivity**, 7, 135-139, (2003).
3. Alpay, Ş., Altın, B., Tonyalı, C., "A note on Riesz spaces with property-b", **Czech. Math. J.** (To appear)
4. Ercan Z., "Interval bounded operators and order weakly compact operators", **Demonstratio Mathematica**, Vol. XXX1, No 4, 805-812, (1998).

Received/ Geliş Tarihi: 17.11.2004

Accepted/Kabul Tarihi: 25.03.2005

Proof. Let E be a Banach lattice and F be an AM-space. Since $E' = E^{\sim}$ and $E^{\sim}$ has b -property, E' has b -property and F' is an AL-space (1). Hence it is obtained $L_b(F', E') = L(F', E')$ (2 Proposition 2.2).

Corollary 2.7 Let E be a Banach lattice and F be an AM-space and T be a continuous operator from E into F . Then the adjoint operator $T' : F' \rightarrow E'$ is order bounded.