Journal of Turkish Operations Management

REALLOCATION OF INPUTS AND OUTPUTS BASED ON REVENUE, COST AND PROFIT EFFICIENCY

Mojtaba GHIYASI[a1] , Zahra AMERI[b]

[a]Assistant Professor, Faculty of Industrial Engineering and Management, Shahrood University of Technology, Shahroud, Iran.
E-mail: mojtaba.ghiasi@gmail.com

[b]MSc. Student, Faculty of Industrial Engineering and Management, Shahrood University of Technology, Shahroud, Iran. E-mail: email@email.edu

تخصیص مجدد ورودی ها و خروجی ها بر مبنای کارایی درآمد، هزینه و سود

مجتبي غياثي، استاديار دانشكده مهندسي صنايع و مديريت، دانشگاه صنعتي شاهرود، سمنان، ايران
زهرا عامري، دانشجوي كارشناسي ارشد، دانشكده مهندسي صنايع و مديريت، دانشگاه صنعتي شاهرود، سمنان، ايران

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 01.03.2018
Revised: 18.03.2018
Accepted: 28.04.2018

Research Article

Keywords:
Data Envelopment Analysis; Output Reallocation; Revenue Efficiency; Cost Efficiency; Profit Pfficiency.

ABSTRACT

Due to the circumstances of the situation, the output of organizational units cannot be changed in some production and service organizations. Therefore, in these conditions, the only possible option is the change in the amount of inputs generated by the units in question, with the limitation that the entire output of organization remains constant. In this study, we present a centralized approach for reallocating output based on cost efficiency across a set of decision making units (DMUs) under a centralized decision-making environment. The proposed model extends the traditional cost efficiency model by allowing for reallocation of output within the DMUs. In fact, reallocate of existence outputs between decision makers allows us to reach the optimal allocation of output and in this regard to achieve the highest level of cost efficiency. Examples of various numerical are presented to illustrate the proposed approach that helps to better understand. The results show that our approach is able to achieve less total cost compared with the conventional non-centralized cost efficiency model. In other words, using the presented models with less input can achieve same output and increased efficiency in the system. Furthermore, a profit analysis is performed, which can provide information for the central decision-maker with respect to how to reallocate the output and input across the DMUs.

چکیده

به دلیل اقتضای شرایط در برخی سازمان‌هایی تولیدی و خدماتی نمی‌توان مقدار خروجی واحدهای سازمانی را تغییر داد لذا در این شرایط تنها گزینه ممکن تغییر در میزان ورودی‌های تولیده شده به وسیله واحدهای مورد نظر است با این محدودیت که خروجی کل سازمان ثابت باقی بماند. در پژوهش حاضر، یک رویکرد متمرکز برای جابجایی خروجی‌ها براساس کارایی هزینه در بین مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده در یک محیط تصمیم‌گیری متمرکز ارائه می‌شود. مدل پیشنهادی در این پژوهش مدل پایه کارایی هزینه را با اجازه برای تخصیص مجدد خروجی در بین واحدهای تصمیم‌گیرنده توسعه می‌دهد. در حقیقت تخصیص مجدد خروجی‌های موجود بین واحدهای تصمیم‌گیرنده این امکان را می‌دهد تا به تخصیص بهینه خروجی نیل کنیم و در این راستا به بیشترین سطح کارایی هزینه دست یابیم. مثال‌های عددی متنوع برای توضیح بیشتر مدل‌ها ارائه شده است که به درک بهتر آنها کمک می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که این رویکرد قادر به دستیابی به هزینه کل کمتر در مقایسه با مدل کارایی هزینه پایه غیر متمرکز معمولی است. به عبارتی با استفاده از مدل ارائه شده می‌توان با ورودی کمتر به همان خروجی و کارایی بیشتر در یک سیستم رسید. علاوه بر این، تجزیه و تحلیل سود انجام می‌شود که می تواند اطلاعات را برای تصمیم‌گیرنده مرکزی در مورد این که چگونه ورودی‌ها و خروجی‌ها در بین واحدها تخصیص مجدد یابد فراهم کند.

*Corresponding author: Mojtaba GHIYASI, yukselarman@gmail.com

۱. مقدمه

هر سازمانی برای اعمال مدیریت صحیح باید از الگوهای علمی ارزیابی عملکرد بهره گیرد، تا بتواند نتایج کارکرد خود را مورد سنجش قرار دهد. بنابراین اندازه‌گیری عملکرد سازمان، یکی از وظایف مهم مدیریتی برای دستیابی به اهداف کنترل و برنامه‌ریزی می‌باشد. روشی که به طور گسترده برای اندازه‌گیری کارایی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده با چندین ورودی و خروجی به کار گرفته شده، تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها است. تکنیک تحلیل پوششی داده‌های پایه توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) پیشنهاد شد. اگر سازمانی بتواند در مقایسه با سازمان دیگر با صرف مقدار کمتری از منابع به هدف مشخص برسد و یا خروجی بیشتری را با ورودی برابر دیگر واحدها تولید کند می‌توان نتیجه گرفت که آن سازمان در مقایسه با سازمان‌های دیگر کارا است. بنابراین ارزیابی عملکرد یکی از وظایف مهم سازمان‌ها است تا نقاط ضعف خود را پیدا کرده و بهبودهایی را ایجاد کنند.

استفاده از تکنیک تحیل پوششی داده‌ها یک راه‌حل برای مشکل تخصیص فراهم می‌کند، زیرا در این روش، درنظر گرفتن برنامه-های تولید شدنی و ارزیابی ورودی‌ها/ خروجی‌ها مبنی بر مشخصه‌های تجربی از یک مجموعه شدنی تولید، امکان‌پذیر می‌باشد (لوزانو و ویلا، ۲۰۰۴). بعضی از نویسندگان مدل‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های متمرکز را از دیدگاه‌های مختلفی که ورودی و یا خروجی‌محور هستند تحت بازده ثابت نسبت به مقیاس و یا بازده متغیر نسبت به مقیاس فنی معرفی کرده‌اند. مدل‌های ورودی‌محور (لوزانو و ویلا ۲۰۰۴؛ اسمیلد و همکاران، ۲۰۰۹) بر به حداقل رساندن مصرف کل داده‌ها به وسیله همه واحدهای تصمیم‌گیرنده تمرکز دارند. به عنوان مثال، لوزانو و ویلا[1] (۲۰۰۴) دو مدل تحلیل پوششی داده‌های متمرکز برای کاهش مقدار کل منابع مصرف شده توسط تمام واحدها در یک سازمان، به جای توجه به مصرف هر واحد به طور جداگانه ارایه دادند. اسمیلد و همکاران[2] (۲۰۰۹) مفاهیم لوزانو و ویلا (۲۰۰۴) را توسعه دادند و آن را تعدیل کردند تا فقط تنظیم واحدهای ناکارآمد قبلی را اصلاح کنند. مدل‌های خروجی‌محور (لوزانو و همکاران، ۲۰۰۴؛ یو و همکاران، ۲۰۱۳) برای به حداکثر رساندن مقدار کل خروجی تمام واحدها به طور همزمان تلاش می‌کنند. برای مثال، لوزانو و همکاران (۲۰۰۴)، یک رویکرد مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های متمرکز خروجی‌محور معرفی کردند.

در زمینه کارایی در سیستم‌های مختلف اعم از بانکداری و رستوران‌ها مطالعاتی توسط محققان انجام شده است. ولی در نظر گرفتن کارایی هزینه و ترکیب کارایی درآمد و هزینه (کارایی سود) از جنبه‌های نوآوری مطالعه حاضر بوده که تاکنون مطالعه‌ای در این حیطه صورت نگرفته است. از این رو پژوهش حاضر بر آن است تا با توجه به اهمیت هزینه‌ها در سازمان و تلاش برای کاهش آنها به بررسی این موضوع مهم بپردازد.

پژوهش‌های قبلی تخصیص منابع متمرکز را با در نظر گرفتن جنبه تکنیکی آن مورد بررسی قرار داده‌اند، لیکن در پژوهش حاضر، موضوع از دیدگاه‌های هزینه، درآمد و سود مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت تصمیم‌گیرنده درصدد تخصیص منابع متمرکز با بیشترین درآمد یا کمترین هزینه و یا بیشترین سود کلی خواهد بود. لذا در این پژوهش ابتدا یک رویکرد متمرکز برای تخصیص ورودی‌ها و خروجی‌ها براساس کارایی هزینه بین مجموعه‌ای از واحدها در یک محیط تصمیم‌گیری متمرکز ارائه می‌شود، با این هدف که هزینه کل ورودی‌های مصرف شده توسط همه واحدهای تصمیم‌گیرنده حداقل شود. سپس با ترکیب مدل کارایی هزینه (CE)[3] ارائه شده در این پژوهش و مدل کارایی درآمد (RE)[4] ارائه شده توسط لیا فانگ[5] (۲۰۱۵)، مدلی جدید مبتنی بر کارایی سود (PE)[6] معرفی می‌شود. مدل کارایی سود این امکان را فراهم می‌کند که در کل سیستم با صرف هزینه کمتری به درآمد بیشتری دست یابد و بالطبع به بالاترین سطح کارایی از نقطه نظر سود رسید.

۲. مدل‌های کارایی درآمد

[1] - Lozano,S., Villa, G.
[2] - Asmild, M., Paradi, J.C., Pastor, J.T.
[3]. cost efficiency
[4]. revenue efficiency
[5]. Lei Fang
[6]. profit efficiency

۲،۱ مدل پایه کارایی درآمد

فرض کنید که n واحد تصمیم‌گیرنده وجود دارد، هر واحد m ورودی را برای تولید s خروجی استفاده می‌کند. برای هر واحد تصمیم‌گیرنده j، بردارهای ورودی و خروجی به صورت $j = 1, \dots, n$؛ (x_j, y_j) مشخص می‌شوند، که در آن $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ و $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj})$ است. همچنین X برای نشان دادن ماتریس $m \times n$ از ورودی‌ها و Y برای نشان دادن ماتریس $s \times n$ از خروجی‌ها به کار می‌رود و فرض بر این است که $X > 0$ و $Y > 0$ می‌باشند.

به طور کلی در تحلیل پوششی داده‌ها مجموعه امکان تولید، تحت بازده متغیر نسبت به مقیاس[1] به شرح زیر مشخص می‌شود:

$$T = \left\{ \left(x, y\right) : x \geq \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j ,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} y_j \lambda_j ,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 ,\ \lambda_j \geq 0 ,\ j = 1, \dots, n \right\}$$

در ادامه این پژوهش از نمادگذاری‌های زیر استفاده خواهد شد:

n	تعداد واحدهای تصمیم‌گیری
x_j	بردار ورودی واحد تصمیم‌گیری j
x_{ij}	مقدار ورودی i مصرف شده توسط واحد تصمیم‌گیری j
y_j	بردار خروجی واحد تصمیم‌گیری j
y_{rj}	مقدار خروجی r تولید شده توسط واحد تصمیم‌گیری j
C	بردار قیمت ورودی
c_{ij}	قیمت ورودی i برای واحد تصمیم‌گیری j
P	بردار قیمت خروجی
p_{rj}	قیمت خروجی r برای واحد تصمیم‌گیری j
λ_j	بردار متغیر شدت/ بردار ضریب واحد تصمیم‌گیری j

فرض کنید که p بردار قیمت خروجی برای DMU_O باشد. با توجه به مجموعه امکان برآورد شده T، حداکثر درآمد برای واحد تصمیم گیری مورد نظر از رابطه زیر به دست می آید (لیافانگ، ۲۰۱۵):

$$\begin{aligned} Max.\quad & P^T y + \varepsilon\,(1^T S^- + 1^T S^+) \\ s.t:\quad & X\lambda + S^- = x_0 \\ & Y\lambda - S^+ = Y \\ & 1^T \lambda = 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

پس از بدست آوردن جواب برای مدل فوق، کارایی درآمد DMU_O به عنوان نسبت حداکثر درآمد به درآمد واقعی از طریق رابطه زیر به دست می آید:

$$RE = \frac{P\,y^*}{P\,y} \qquad (2)$$

۲،۲ تخصیص مجدد ورودی‌های موجود مبتنی بر کارایی درآمد

در این بخش، یک رویکرد متمرکز برای تخصیص ورودی‌ها براساس کارایی درآمد بین مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده در یک محیط تصمیم‌گیری متمرکز، ارایه می‌شود. با استفاده از این مدل که اجازه تخصیص مجدد ورودی‌ها را می‌دهد، ممکن است به درآمد کل بالاتری نسبت به مدل درآمد غیرمتمرکز معمولی دست یابیم. فرض بر این است که تمام واحدها تحت یک واحد مرکزی عمل می‌کنند. در چنین محیط تصمیم‌گیری متمرکزی، هدف این است که ورودی‌های موجود طوری مجددا تخصیص یابند که درآمد کل خروجی تولید شده توسط همه واحدهای تصمیم‌گیری حداکثر شود. بنابراین، مدل تخصیص منابع مبتنی بر کارایی

[1].Variable Returns to Scale (VRS)

درآمد را با توجه به تخصیص مجدد ورودی‌های موجود درون مجموعه امکان تولید اصلی می‌توان به شرح ذیل فرموله نمود (لیافانگ، ۲۰۱۵):

$$Max\ \Psi. \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{s} p_r y_r^k \ + \varepsilon\left(\sum_{i\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^- + \sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} s_{rk}^+\right) \qquad (۳)$$

$$s.t: \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}x_{ij} \le x_{ik} \qquad k = 1،\dots،n;\ i \in U \qquad (۳,۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}x_{ij} + s_{ik}^- = x_i^k \qquad k = 1،\dots،n;\ i \notin U \qquad (۳,۲)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}y_{rj} - s_{rk}^+ = y_r^k \qquad k = 1،\dots،n;\ r = 1،\dots،s \qquad (۳,۳)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_i^k = \sum_{k=1}^{n} x_{ij} \qquad i = 1،\dots،m;\ i \notin U \qquad (۳,۴)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk} = 1 \qquad k = 1،\dots،n \qquad (۳,۵)$$

$$\lambda_{jk} \ge 0 \qquad k = 1،\dots،n;\ j = 1،\dots،n \qquad (۳,۶)$$

در این مدل U نشان‌دهنده مجموعه‌ای از متغیرهای ورودی غیرقابل تخصیص مجدد است. محدودیت (۳,۱) و (۳,۲) نشان‌دهنده این است که تخصیص مجدد ورودی‌ها، مجموعه امکان تولید اصلی را تغییر نمی‌دهد. محدودیت (۳,۴) بیان می‌کند که واحد مرکزی درصدد تخصیص مجدد ورودی‌ها است و کل ورودی‌های تخصیص داده شده باید مساوی ورودی‌های موجود باشند در واقع بیان می‌کند که مقدار ورودی‌ها قبل و بعد از تخصیص ثابت است. تابع هدف به دنبال حداکثر نمودن درآمد با تخصیص مجدد ورودی‌های موجود در میان واحدهای تصمیم‌گیرنده است. این مدل در حقیقت به دنبال افزایش تولید و رسیدن به حداکثر درآمد کل سیستم با صرف کل ورودی‌های در اختیار است که این مهم با یافتن تخصیص بهینه مجدد ورودی‌ها انجام می‌پذیرد.

۳. مدل‌های کارایی هزینه

۳,۱ مدل پایه کارایی هزینه

فرض کنید که C بردار قیمت ورودی برای $\mathrm{DMU_O}$ باشد. با توجه به مجموعه امکان برآورد شده T، حداقل هزینه برای واحد تصمیم‌گیرنده مورد نظر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Min.\ \ & C^T x + \varepsilon\left(1^T S^- + 1^T S^+\right) \\ s.t{:}\ \ & X\lambda + S^- = x \\ & Y\lambda - S^+ = y_0 \\ & 1^T\lambda = 1 \\ & \lambda \ge 0 \end{aligned} \qquad (۴)$$

در این مدل، ۱ ماتریسی ستونی است که تمام عناصر آن ۱ و تعداد عناصر آن برابر با تعداد واحدهای تصمیم‌گیری است، و نماد ε نشان‌دهنده یک عدد مثبت به اندازه کافی کوچک است که اصطلاحا به آن عدد غیر ارشمیدسی گفته می‌شود. بردار متغیر کمکی کمبود (S^-)، نشان‌دهنده ورودی واقعی است که می‌تواند کاهش یابد و بردار متغیر کمکی مازاد (S^+)، نشان‌دهنده خروجی واقعی است که می‌تواند افزایش یابد. $\lambda = (\lambda_1،\dots،\lambda_m)^T$ یک بردار غیرمنفی و x سطح حداقل هزینه واحد تصمیم‌گیری مورد نظر می‌باشد. با توجه به این که C قیمت ورودی و y_0 سطح خروجی است.

مدل (۴) را می‌توان در یک فرآیند دو مرحله‌ای محاسبه نمود ؛ ابتدا، حداقل هزینه $C^T x^*$ را با نادیده گرفتن متغیرهای کمکی محاسبه می‌نماییم، که در آن x^* جواب بهینه مدل (۴) است. سپس در مرحله دوم، متغیرهای کمکی را با تثبیت $C^T x^*$ بهینه می‌کنیم. پس از بدست آوردن جواب برای مدل فوق، کارایی هزینه DMU_O به عنوان نسبت حداقل هزینه به هزینه واقعی از طریق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$CE = \frac{cx^*}{cx} \qquad (۵)$$

۳,۲ تخصیص مجدد خروجی‌های موجود مبتنی بر کارایی هزینه

از آنجا که کاهش هزینه در سیستم‌ها یکی از روش‌های افزایش سود است؛ بر این مبنا سازمان‌ها به هزینه‌ها توجه ویژه‌ای دارند. در واقع سیستم‌ها به دنبال کاهش هزینه با ثابت نگه داشتن سطح خروجی‌ها هستند. در این بخش مدل پایه کارایی هزینه، با تخصیص مجدد خروجی‌ها بین واحدهای تصمیم‌گیری توسعه می‌یابد. نتایج حاصل از این روش نشان می‌دهد که با اتخاذ یک دیدگاه متمرکز که اجازه تخصیص مجدد خروجی‌ها را می‌دهد، این امکان وجود دارد که به هزینه کل پایین‌تری نسبت به مدل هزینه غیر متمرکز معمولی دست یابیم. فرض بر این است که تمام واحدها، تحت یک واحد مرکزی عمل می‌کنند. در چنین محیط تصمیم‌گیری متمرکزی، هدف تصمیم‌گیرنده مرکزی، تخصیص مجدد خروجی‌های موجود به مجموعه‌ای از واحدهای موجود به نحوی است که هزینه کل ورودی‌ها حداقل گردد. بنابراین، مدل تخصیص خروجی‌ها مبتنی بر کارایی هزینه را با توجه به تخصیص مجدد خروجی‌های موجود درون مجموعه‌ی امکان تولید اصلی، می‌توان به شرح زیر فرموله کرد:

$$Min\ Q.\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^k \ +\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^- + \sum_{r\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{rk}^+\right) \qquad (۶) \qquad s.t:$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}y_{rj} \geq y_{rk} \qquad k=1,\dots,n;\ r\in U \qquad (۶,۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}y_{rj} - s_{rk}^+ = y_r^k \qquad k=1,\dots,n;\ r\notin U \qquad (۶,۲)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}x_{ij} + s_{ik}^- = x_i^k \qquad k=1,\dots,n;\ i=1,\dots,m \qquad (۶,۳)$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_r^k = \sum_{k=1}^{n} y_{rj} \qquad r=1,\dots,s;\ r\notin U \qquad (۶,۴)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk} = 1 \qquad k=1,\dots,n \qquad (۶,۵) \qquad \lambda_{jk}\geq$$

$$0 \qquad k=1,\dots,n;\ j=1,\dots,n \qquad (۶,۶)$$

در این مدل $j,k = 1,\dots,n$ شاخص‌هایی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده هستند. مدل فوق این امکان را در نظر گرفته است که برخی از خروجی‌ها نمی‌توانند تخصیص مجدد یابند لذا U نشان‌دهنده مجموعه‌ای از متغیرهای خروجی غیر قابل تخصیص مجدد و $\begin{pmatrix} x_i^k \\ y_r^k \end{pmatrix}$ نشان‌دهنده مقدارهای ورودی و خروجی بعد از تخصیص هستند. محدودیت (۶,۱) و (۶,۲) بیان می‌کند که تخصیص مجدد خروجی‌ها، مجموعه امکان تولید اصلی را تغییر نمی‌دهد. محدودیت (۶,۴) بیان می‌کند که کل خروجی‌های تخصیصص داده شده باید مساوی خروجی‌های موجود باشند و واحد مرکزی به دنبال تخصیص مجدد خروجی‌های موجود است. محدودیت (۵,۵) فرض بازده متغیر نسبت به مقیاس است به این مفهوم که هر مضربی از ورودی‌ها، می‌تواند همان مضرب از خروجی‌ها یا کمتر از آن و یا بیشتر از آن را در خروجی‌ها تولید کند. تابع هدف به دنبال حداقل نمودن هزینه ورودی‌ها با تخصیص مجدد خروجی‌های موجود در میان واحدهای تصمیم‌گیری موجود است. این مدل در حقیقت در صدد تولید خروجی کل جاری سیستم با کمترین هزینه است. مدل (۶) می‌تواند در یک فرآیند دو مرحله ای شبیه به مدل (۴) محاسبه شود. تفاوت‌های اصلی بین مدل (۴) و (۶) عبارتند از:

- مدل (۴) هزینه را به طور جداگانه برای هر واحد تصمیم‌گیرنده با توجه به سطح خروجی آن حداقل می‌کند در حالی که مدل (۶) برای به حداقل رساندن هزینه کل همه واحدهای تصمیم گیرنده، با تخصیص مجدد خروجی‌ها میان واحدها هدف‌گذاری می‌کند در واقع مدل (۴) می‌بایست به تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده حل شود تا وضعیت هزینه کل سیستم مشخص گردد حال آنکه مدل (۶) همین امر را صرفا با یک بار حل انجام می‌دهد.
- مدل (۴) ورودی برای هر واحد را به طور مستقل با تثبیت سطح خروجی آن در نظر می‌گیرد. در حالی که مدل (۶) ورودی و خروجی برای هر واحد را به طور همزمان در نظر می‌گیرد، که تنها مستلزم آن است که خروجی کل اصلی نمی تواند کاهش یا افزایش یابد.
- تعداد متغیرها (با احتساب متغیرهای کمکی) و محدودیت‌های مدل (۴) به ترتیب $n+2m+s$ و $m+s+1$ و تعداد متغیرها (با احتساب متغیرهای کمکی) و محدودیت‌های مدل (۶) به ترتیب $n^2+2nm+2ns$ و $nm+ns+s+n$ می‌باشد.

قضیه ۱. تمام واحدهای تحت ارزیابی بعد از تخصیص مجدد حاصل از مدل (۶) کارای هزینه می‌باشند.

اثبات: فرض کنید x_i^{k*}، y_r^{k*}، λ_{jk}^*، s_{ik}^{-*}، $s_{rk}^{+*}(k=1,\dots,n;\ i=1,\dots,m;\ r=1,\dots,s)$ جواب‌های بهینه مدل (۶) باشند. در این صورت اگر فرض شود که یک واحد دلخواه مانند DMU_O وجود داشته باشد که کارا نباشد لذا یک بردار مانند $(\lambda_{1o},\lambda_{2o},\dots,\lambda_{no})$ وجود خواهید داشت که شروط زیر برقرار است:

$$y_r^{o*}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jo}y_{rj}-s_{ro}^{+}$$
$$\hat{x}_{io}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jo}x_{ij}+s_{io}^{-}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}=1$$

به طوری که

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\,\hat{x}_{io}+\varepsilon\sum(s_{io}^{-}+s_{ro}^{+})<\sum_{i=1}^{m}c_ix_i^{o*}+\varepsilon\sum(s_{io}^{-}+s_{ro}^{+})$$

اگر با در نظر گرفتن DMU_O بردار $(\lambda_{1o},\lambda_{2o},\dots,\lambda_{no})$ به جای بردار بهینه $(\lambda_{1o}^*,\lambda_{2o}^*,\dots,\lambda_{no}^*)$ ارایه شده در مدل (۶) استفاده شود منجر به یک جواب شدنی برای مدل (۶) می‌شود که مقدار تابع هدف آن در مدل (۶) به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{k\neq o}\sum_{i=1}^{m}c_ix_i^{k*}+\varepsilon\left(\sum_{k\neq o}\sum_{i=1}^{m}s_{ik}^{-*}+\sum_{k\neq o}\sum_{r=1}^{s}s_{rk}^{+*}\right)+\sum_{i=1}^{m}c_i\,\hat{x}_{io}+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_{io}^{-*}+\sum_{r=1}^{s}s_{ro}^{+*}\right)<\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_ix_i^{k*}+\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}s_{ik}^{-*}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{s}s_{rk}^{+*}\right)$$

بنابراین به یک تناقض با جواب بهینه در مدل (۶) می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و در نتیجه DMU_O کاراست.

۴. رویکرد ترکیبی کارایی درآمد و هزینه (مدل کارایی سود)

۴،۱ مدل پایه کارایی سود

سود به عنوان ابزاری برای سنجش اثربخشی مدیریت و وسیله‌ای برای ارزیابی تصمیم‌گیری‌ها همواره مورد استفاده سرمایه‌گذاران، مدیران و تحلیل‌گران بوده است. سرمایه‌گذاران به سود می‌اندیشند، سودی که متناسب با ریسک سرمایه‌گذاری آنها باشد. در زمانی که راهکارهای مناسب با توجه به محیط تجاری، برای مدیران و استفاده‌کنندگان اطلاعات مالی جهت ایجاد فرصت‌های سرمایه‌گذاری سودآور مشخص شود، مطمئنا نتایج شگفت‌آوری بوجود می‌آورد که می‌تواند یک واحد تجاری را از مرز نابودی به مرز قدرت برساند. سود معیاری برای اندازه‌گیری دستاوردها، کارآیی مدیریت و همچنین نشانه‌ای از تصمیمات آتی مدیریت است و حداکثر سازی سود یکی از مهمترین اهداف هر واحد تجاری خواهد بود. در واقع سود، در اصطلاح علم اقتصاد، برابر با تفاوت درآمد و هزینه است که با درآمد رابطه مستقیم و با هزینه، رابطه معکوس دارد.

فرض کنید که p بردار قیمت خروجی و C بردار قیمت ورودی برای DMU_O باشد. با توجه به مجموعه امکان برآورد شده T، حداکثر سود برای واحد تصمیم‌گیری مورد نظر از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
Max.\ & (P^Ty-C^Tx)+\varepsilon\,(1^TS^-+1^TS^+)\\
s.t:\ & X\lambda+S^-=x\\
& Y\lambda-S^+=Y\\
& 1^T\lambda=1\\
& \lambda\geq 0
\end{aligned}\qquad (۷)$$

پس از بدست آوردن جواب برای مدل فوق، کارایی سود DMU_O به عنوان نسبت سود واقعی به حداکثر سود از طریق رابطه زیر به دست می آید:

$$PE=\frac{Py-Cx}{Py^*-Cx^*}\qquad (۸)$$

سطح قابل قبولی از سود حاصله برای یک شرکت میزان هزینه و درآمد آن شرکت را می‌تواند توجیه کند ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست. به عبارتی میزان هزینه پایین و یا میزان درآمد بالا برای یک شرکت تضمینی برای یک سطح سود قابل قبول برای شرکت مذکور نمی‌باشد.

۴،۲ تخصیص مجدد ورودی‌ها و خروجی‌های موجود به طور همزمان مبتنی بر کارایی سود

تخصیص مجدد منابع ورودی و خروجی در میان واحدهای تصمیم‌گیری ممکن است به نحوی صورت گیرد که سود حاصل از واحدهای تصمیم‌گیری حداکثر گردد. در چنین شرایطی، مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر که با تخصیص مجدد، حداکثر سود را ایجاد می‌کند، توسعه می‌یابد. در این مدل فرض بر این است که هدف تصمیم‌گیرنده مرکزی، تخصیص مجدد ورودی‌ها و خروجی‌های موجود به مجموعه‌ای از واحدهای موجود است به نحوی که سود حاصل از مجموع واحدهای تصمیم‌گیری حداکثر گردد. بنابراین، مدل تخصیص ورودی‌ها و خروجی‌ها مبتنی بر کارایی سود را با توجه به تخصیص مجدد ورودی‌ها و خروجی‌های موجود درون مجموعه امکان تولید اصلی، می توان به شرح ذیل فرموله نمود:

$$Max\ \dagger.\quad \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{s} p_r y_r^k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^k\right) + \varepsilon\left(\sum_{i\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^{-} + \sum_{r\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{rk}^{+}\right) \quad (۹)$$

$$s.t:\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}x_{ij} \le x_{ik} \qquad k=1,\dots,n;\ i\in U \qquad (۹,۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}x_{ij} + s_{ik}^{-} = x_i^k \qquad k=1,\dots,n;\ i\notin U \qquad (۹,۲)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}y_{rj} \ge y_{rk} \qquad k=1,\dots,n;\ r\in U \qquad (۹,۳)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk}y_{rj} - s_{rk}^{+} = y_r^k \qquad k=1,\dots,n;\ r\notin U \qquad (۹,۴)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_i^k \le \sum_{k=1}^{n} x_{ij} \qquad i=1,\dots,m;\ i\notin U \qquad (۹,۵)$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_r^k \ge \sum_{k=1}^{n} y_{rj} \qquad r=1,\dots,s;\ r\notin U \qquad (۹,۶)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk} = 1 \qquad k=1,\dots,n \qquad (۹,۷)$$

$$\lambda_{jk} \ge 0 \qquad k=1,\dots,n;\ j=1,\dots,s \qquad (۹,۸)$$

قضیه ۲. تمام واحدهای تحت ارزیابی بعد از تخصیص مجدد حاصل از مدل (۹) کارای سود می‌باشند.

اثبات: فرض کنید x_i^{k*}، y_r^{k*}، λ_{jk}^{*}، s_{ik}^{-*}، s_{rk}^{+*} $(k=1,\dots,n; i=1,\dots,m; r=1,\dots,s)$ جواب‌های بهینه مدل (۹) باشند. در این صورت اگر فرض شود که DMU_O کارا نیست یک بردار $(\lambda_{1o},\lambda_{2o},\dots,\lambda_{no})$ وجود دارد که روابط زیر برقرار است:

$$\hat{y}_{io} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jo}y_{rj} - s_{ro}^{+}$$
$$\hat{x}_{io} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{jo}x_{ij} + s_{io}^{-}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jk} = 1$$

به طوری که

$$\sum_{r=1}^{s} p_r\,\hat{y}_{ro} - \sum_{i=1}^{m} c_i\,\hat{x}_{io} + \varepsilon\sum(s_{io}^{-}+s_{ro}^{+}) > \sum_{r=1}^{s} p_r\,y_i^{o*} - \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{o*} + \varepsilon\sum(s_{io}^{-}+s_{ro}^{+})$$

اگر با در نظر گرفتن DMU_O بردار $(\lambda_{1o},\lambda_{2o},\dots,\lambda_{no})$ را به جای بردار بهینه $(\lambda_{1o}^{*},\lambda_{2o}^{*},\dots,\lambda_{no}^{*})$ ارایه شده در مدل (۹) استفاده شود منجر به یک جواب شدنی در مدل (۹) می‌شود در این صورت مقدار تابع هدف در مدل (۹) به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{k\neq o}\sum_{r=1}^{s} p_r y_r^{k*} - \sum_{k\neq o}\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{k*} + \varepsilon\left(\sum_{i\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^{-*} + \sum_{r\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{rk}^{+*}\right) + \sum_{r=1}^{s} p_r\,\hat{y}_{ro} - \sum_{i=1}^{m} c_i\,\hat{x}_{io} + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_{io}^{-*} + \sum_{r=1}^{s} s_{io}^{+*}\right) > \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{s} p_r y_r^{k*} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^{k*} + \varepsilon\left(\sum_{i\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}^{-*} + \sum_{r\notin U}\sum_{k=1}^{n} s_{rk}^{+*}\right)$$

بنابراین به یک تناقض با جواب بهینه در مدل (۹) می‌رسیم. لذا فرض خلف باطل و در نتیجه DMU_O کارا است.

۵. مثال‌های عددی

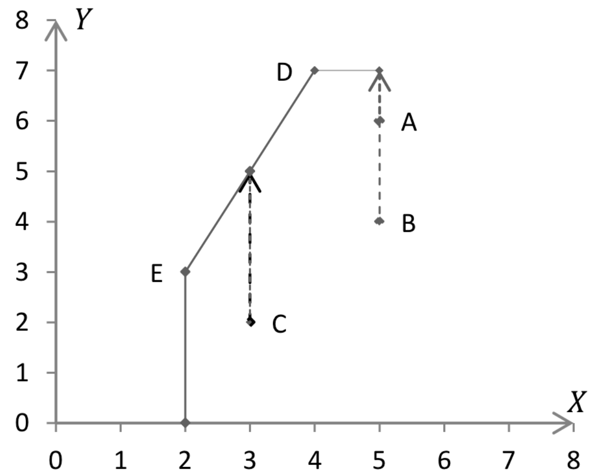
در این قسمت مدل‌های ارایه شده بر روی دو مجموعه داده‌ها با تعداد ورودی و خروجی‌های مختلف به کارگرفته می‌شوند. ابتدا مثالی را با یک ورودی و یک خروجی بررسی می‌کنیم تا امکان ترسیم گرافیکی مسئله را جهت درک بهتر موضوع داشته باشیم.

برای حل مدل‌های (۱) و (۳) قیمت خروجی را $P = 4$ درنظر گرفته می‌شود. حال اگر مثال براساس مدل (۱) و با استفاده از نرم افزار lingo حل شود ستون آخر جدول شماره (۱) مربوط به حداکثر خروجی است. درآمد کل واقعی به این صورت $= 4 * 22$

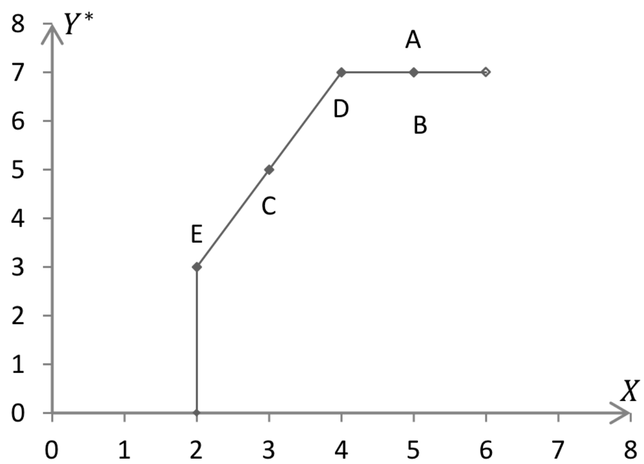
88 محاسبه می‌شود و اما با توجه به جدول شماره (۱) زمانی که همه واحدها با استفاده از مدل (۱) پردازش شوند حداکثر درآمد کل یعنی درآمد همه واحدها در صورتی که تمام واحدها در محیط غیرمتمرکز به مقدار بهینه تولید کنند برابر $116 = 4 * 29$ خواهد بود. در این محیط غیرمتمرکز تخصیص مجدد ورودی بین واحدها انجام نمی‌گیرد در این محیط سعی بر این است که هر واحد به طور مستقل از دیگر واحدها و با توجه به سطح ورودی ثابت، حداکثر خروجی را تولید کند. پس در صورتی که همه واحدها کارآی درآمد باشند درآمد کل از ۸۸ به ۱۱۶ افزایش می‌یابد.

جدول (۱): نتایج مدل (۱) برای مثال یک ورودی و یک خروجی

DMU	X	Y	RE	Y^*
A	۵	۶	۱/۱۶	۷
B	۵	۴	۱/۷۵	۷
C	۳	۲	۲/۵	۵
D	۴	۷	۱	۷
E	۲	۳	۱	۳
کل	۱۹	۲۲		۲۹



نمودار (الف): نمودار خروجی محور قبل از به دست آوردن مقادیر بهینه



نمودار (ب): نمودار خروجی محور بعد از به دست آوردن مقادیر بهینه

مودار (الف) نشان می‌دهد که واحدهای D و E کارا هستند زیرا روی مرز کارایی قرار گرفته‌اند و واحدهای A ، B و C که در پایین مرز کارایی قرار دارند ناکارا هستند فاصله نقاط تا خط نشان‌دهنده میزان ناکارایی است و برای این که مشخص شود واحدهای ناکارا باید از کدام واحد الگو بگیرند نقاط باید به مرز کارایی وصل شوند به هر نقطه‌ای که برخورد کنند آن واحد الگو قرار می‌گیرد مثلا اگر نقطه C به مرز کارایی وصل شود بین نقاط D و E قرار می‌گیرد در نتیجه واحدهای D و E می‌توانند الگوی واحد C قرار گیرند. نمودار (ب) نشان می‌دهد در صورتی که واحدها با مدل (۱) حل شوند تمام واحدها کارای درآمد هستند و روی مرز کارایی قرار می‌گیرند.

جدول شماره (۲) جواب‌های بهینه به دست آمده براساس مدل (۳) را نشان می‌دهد. از جدول شماره (۳) مشخص می‌شود که درآمد کل مدل (۳) را می‌توان با تخصیص مجدد از ۱۱۶ به ۱۳۲ افزایش داد در این صورت حتی زمانی که تمام واحدها کارای درآمد هستند این تخصیص مجدد در محیط متمرکز می‌تواند باعث افزایش درآمد کل تا $16 = 132 - 116$ شود که این افزایش درآمد از تخصیص مجدد منابع ورودی ناشی می‌شود. برای مثال واحد E در محیط غیر متمرکز، کارا است و درآمد کل آن

مشروط به ورودی کل ثابت داده شده $12 = 4 * 3$ است. در محیط متمرکز، ورودی واحد E ، 2 واحد افزایش یافته و درآمد آن $28 = 4 * 7$ است که در مقایسه با درآمد اصلی آن ۱۶ واحد افزایش یافته است. به این دلیل است که تخصیص مجدد در میان تمام واحدها در افزایش درآمد کل تاثیر دارد.

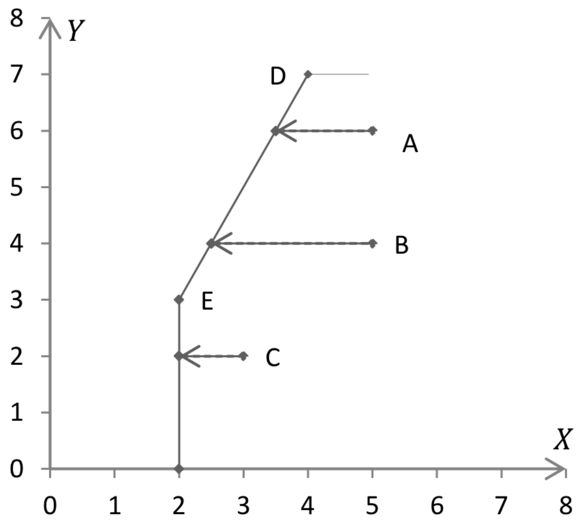
جدول (۲) : نتایج مدل (۳) برای مثال یک ورودی و یک خروجی

DMU	X^*	Y^*	RE
A	۳ (-۲)	۵	۱
B	۴ (-۱)	۷	۱
C	۴ (۱)	۷	۱
D	۴	۷	۱
E	۴(۲)	۷	۱
کل	۱۹	۳۳	

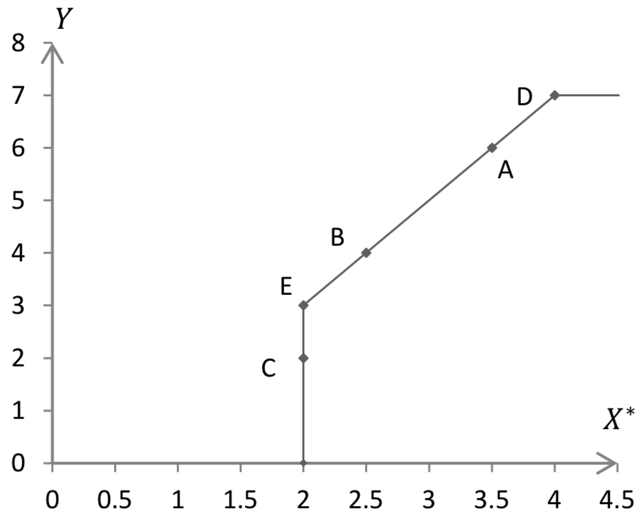
برای حل مدل‌های (۴) و (۶) قیمت ورودی را $C = 2$ در نظر می‌گیریم در این صورت اگر مثال براساس مدل (۴) حل شود. ستون آخر جدول شماره (۳) حداقل ورودی را نشان می‌دهد. هزینه کل واقعی به این صورت $19 * 2 = 38$ محاسبه می‌شود و اما براساس جدول شماره (۳) زمانی که همه واحدها با استفاده از مدل (۴) پردازش شوند حداقل هزینه کل یعنی هزینه ورودی همه واحدها در صورتی که تمام واحدها در محیط غیرمتمرکز به مقدار بهینه از ورودی‌ها مصرف کنند برابر $14 * 2 = 28$ خواهد بود. در واقع در این محیط غیرمتمرکز تخصیص مجدد خروجی بین واحدها انجام نمی‌گیرد در این محیط سعی بر این است که هر واحد به طور مستقل از دیگر واحدها و با توجه به سطح خروجی ثابت حداقل مصرف را از ورودی‌ها داشته باشد. پس در صورتی که همه واحدها کارای هزینه باشند هزینه کل از ۳۸ به ۲۸ کاهش می یابد.

جدول (۳) : نتایج مدل (۴) برای مثال یک ورودی و یک خروجی

DMU	X	Y	CE	X^*
A	۵	۶	۰/۷۰	۳/۵
B	۵	۴	۰/۵۰	۲/۵
C	۳	۲	۰/۶۶	۲
D	۴	۷	۱	۴
E	۲	۳	۱	۲
کل	۱۹	۲۲		۱۴



نمودار (ج): نمودار ورودی محور قبل از به دست آوردن مقادیر بهینه



نمودار (د): نمودار ورودی محور بعد به دست آوردن مقادیر بهینه

نمودار (ج) نشان می‌دهد که اگرچه واحدهای کارا در هر دو مدل خروجی‌محور و ورودی‌محور یکسان هستند اما واحدهای الگو تغییر می‌کنند. نمودار (د) جهت بهبود کارایی را در راستای بهبود کارایی هزینه نشان می‌دهد. همچنین این نمودار نشان می‌دهد که اگرچه واحد C کارا است اما کارایی آن ضعیف است زیرا این واحد با همین ورودی می‌تواند خروجی بیشتری تولید کند.

حال در صورتی که یک تصمیم‌گیرنده مرکزی بتواند تخصیص مجدد انجام دهد به طوری که هزینه کل ورودی مصرف شده توسط همه واحدهای تصمیم‌گیرنده حداقل شود این امر منجر به استفاده از مدل (۶) خواهد شد. جدول شماره (۴) جواب‌های بهینه به دست آمده براساس مدل (۶) نشان می‌دهد. از جدول شماره (۴) مشخص می‌شود که هزینه کل سیستم با استفاده از مدل (۶) را می‌توان با تخصیص مجدد از ۲۸ به ۲۶ کاهش داد در این صورت حتی زمانی که تمام واحدها کارای هزینه هستند این تخصیص مجدد در محیط متمرکز می‌تواند باعث کاهش هزینه کل تا $28 - 26 = 2$ شود که این کاهش هزینه از تخصیص مجدد منابع خروجی ناشی می‌شود. برای مثال واحد D در محیط غیر متمرکز، کارا است و هزینه کل آن مشروط به خروجی ثابت تولید شده $4 * 2 = 8$ است. در محیط متمرکز، خروجی واحد D، ۴ واحد کاهش یافته و هزینه آن $4 = 2 * 2$ است که در مقایسه با هزینه اصلی آن ۵ واحد کاهش داشته است. به این دلیل است که تخصیص مجدد در میان تمام واحدها در کاهش هزینه کل تاثیر دارد. اعداد داخل پرانتز میزان تغییرات را نشان می‌دهند.

جدول (۴): نتایج مدل (۶) برای مثال یک ورودی و یک خروجی

DMU	X^*	Y^*
A	۴	۷ (۱)
B	۳	۶ (۲)
C	۲	۳ (۱)
D	۲	۳ (-۴)
E	۲	۳
کل	۱۳	۲۲

برای حل مدل‌های (۷) و (۹) قیمت ورودی $C = 2$ و قیمت خروجی $P = 4$ در نظر گرفته می‌شود حال اگر مثال براساس مدل (۷) حل شود می‌تواند واحدی را که نسبت به بقیه بهترین وضعیت را دارد مشخص کند. سود کل واقعی به این صورت

$50 = (2 * 19) - (4 * 22)$ محاسبه می‌شود و اما با توجه به جدول شماره (۵) زمانی که همه واحدها با استفاده از مدل (۵) پردازش شوند حداکثر سود کل یعنی سود همه واحدها در صورتی که تمام واحدها در محیط غیرمتمرکز به مقدار بهینه مصرف و به مقدار بهینه تولید کنند برابر $100 = (2 * 20) - (4 * 35)$ خواهد بود. در این محیط غیرمتمرکز تخصیص مجدد ورودی و خروجی بین واحدها انجام نمی‌گیرد در این محیط سعی بر این است که هر واحد به طور مستقل از دیگر واحدها حداکثر سود را تولید کند. در این صورت زمانی که همه واحدها کارآی سود باشند سود کل از ۵۰ به ۱۰۰ افزایش می‌یابد. در این حالت با فرض این که مجموعه امکان تولید نمی‌تواند تغیر کند اگر همه واحدها مانند واحد D عمل کنند بیشترین سود را داریم.

جدول (۵) : نتایج مدل (۷) برای مثال یک ورودی و یک خروجی

DMU	X	Y	PE	X^*	Y^*
A	۵	۶	۰/۷	۴	۷
B	۵	۴	۰/۳	۴	۷
C	۳	۲	۰/۱	۴	۷
D	۴	۷	۱	۴	۷
E	۲	۳	۰/۴	۴	۷
کل	۱۹	۲۲		۲۰	۳۵

جدول شماره (۶) جواب‌های بهینه به دست آمده براساس مدل (۹) را نشان می‌دهد. از جدول شماره (۶) مشخص می‌شود که سود کل مدل (۹) را می‌توان با تخصیص مجدد ورودی‌ها وخروجی‌ها افزایش داد. سود کل قبل از تخصیص مجدد ورودی‌ها و خروجی‌ها بدین صورت $50 = (2 * 19) - (4 * 22)$ محاسبه می‌شود و اما بعد از تخصیص مجدد سود کل $94 = (2 * 22) - (4 * 33)$ خواهد بود.

جدول (۶): نتایج مدل (۹) برای مثال یک ورودی و یک خروجی

DMU	X^*	Y^*	PE
A	۳ (-۲)	۵ (-۱)	۱
B	۴ (-۱)	۷ (۳)	۱
C	۴ (۱)	۷ (۵)	۱
D	۴	۷	۱
E	۴ (۲)	۷ (۴)	۱
کل	۱۹	۳۳	

سپس مثالی با دو ورودی و دو خروجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای حل مدل‌های (۱) و (۳) بردار قیمت خروجی‌ها را $P = (4,3)^T$ در نظر می‌گیریم اگر مثال براساس مدل (۱) حل شود دو ستون آخر جدول شماره (۷) نشان‌دهنده حداکثر خروجی است. درآمد کل واقعی به این صورت $14 * 4 + 17 * 3 = 107$ و حداکثر درآمد به این صورت $13.5 * 4 + 19.85 * 3 = 113.55$ محاسبه می‌شود. در این صورت زمانی که همه واحدها کارای درآمد باشند درآمد کل از ۱۰۷ به ۱۱۳.۵۵ افزایش می‌یابد.

جدول (۷): نتایج مدل (۱) برای مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	X_1	X_2	Y_1	Y_2	RE	Y_1^*	Y_2^*
A	۸	۱۰	۲	۵	۱	۲	۵

B	۱۲	۵	۴	۶	۱	۴	۶
C	۹	۶	۳	۲	۱/۳۶	۲/۵	۴/۸۵
D	۷	۱۲	۴	۱	۱	۴	۱
E	۶	۲	۱	۳	۱	۱	۳
کل	۴۲	۳۵	۱۴	۱۷		۱۳/۵	۱۹/۸۵

جدول شماره (۸) جواب‌های بهینه به دست آمده براساس مدل (۳) را نشان می‌دهد. با توجه به جدول شماره (۸) درآمد کل مدل (۳) را می‌توان با تخصیص مجدد از ۱۱۳/۵۵ به ۱۲۳ افزایش داد در این صورت حتی زمانی که تمام واحدها کارای درآمد باشند افزایش درآمد کل $123 - 113.55 = 9.45$ است که از تخصیص مجدد منابع ورودی ناشی می‌شود. برای مثال واحد A در محیط غیر متمرکز، کارا است و درآمد کلش مشروط به ورودی ثابت داده شده $2 * 4 + 5 * 3 = 23$ است. در محیط متمرکز، ورودی x_1 از واحد A، 4 واحد افزایش و ورودی x_2 از واحد ۱، ۵ واحد کاهش یافته و درآمد آن $4 * 4 + 6 * 3 = 34$ است که در مقایسه با درآمد اصلی آن ۱۱ واحد افزایش یافته است.

جدول (۸): نتایج مدل (۳) برای مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	X_1^*	X_2^*	Y_1^*	Y_2^*	RE
A	۱۲ (۴)	۵ (-۵)	۴	۶	۱
B	۸ (-۴)	۸ (۳)	۲	۴	۱
C	۸ (۱)	۱۰ (۴)	۲	۵	۱
D	۸ (۱)	۱۰ (-۲)	۲	۵	۱
E	۶	۲	۲	۵	۱
کل	۴۲	۳۵	۱۲	۲۵	

برای حل مدل‌های (۴) و (۶) قیمت ورودی ها $C = (1,0.2)^T$ در نظر گرفته می‌شود. حال اگر مثال براساس مدل (۴) حل شود دو ستون آخر جدول شماره (۹) مقادیر حداقل ورودی را نشان می‌دهد. هزینه کل واقعی $42 * 1 + 35 * 0.2 = 49$ محاسبه می‌شود و اما همان طور که در جدول شماره (۹) مشاهده می‌کنید زمانی که همه واحدها با استفاده از مدل (۱) پردازش شوند حداقل هزینه کل یعنی هزینه ورودی همه واحدها در صورتی که تمام واحدها در محیط غیرمتمرکز به مقدار بهینه از ورودی‌ها مصرف کنند برابر $40 * 1 + 37.2 * 0.2 = 47.44$ است. این بدان معنی است که زمانی که همه واحدها کارای هزینه باشند هزینه کل از ۴۹ به ۴۷.۴۴ کاهش می‌یابد.

جدول (۹): نتایج مدل (۴) برای مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	X_1	X_2	Y_1	Y_2	CE	X_1^*	X_2^*
A	۸	۱۰	۲	۵	۱	۸	۱۰
B	۱۲	۵	۴	۶	۱	۱۲	۵
C	۹	۶	۳	۲	۰/۸۵	۷	۸/۲
D	۷	۱۲	۴	۱	۱	۷	۱۲
E	۶	۲	۱	۳	۱	۶	۲
کل	۴۲	۳۵	۱۴	۱۷		۴۰	۳۷/۲

حال اگر یک تصمیم‌گیرنده بتواند تخصیص مجدد انجام دهد به طوری که هزینه کل ورودی مصرف شده توسط همه واحدها حداقل شود این امر منجر به استفاده از مدل (۶) خواهد شد. جدول شماره (۱۰) جواب‌های بهینه به دست آمده براساس مدل (۶) و حل شده را نشان می‌دهد. از جدول شماره (۱۰) مشخص می شود که هزینه کل مدل (۶) را می‌توان با تخصیص مجدد از ۴۷.۴۴ به ۴۶/۷۶ کاهش داد در این صورت حتی زمانی که تمام واحدها کارای هزینه باشند کاهش هزینه کل $47.44 - 46.76 = 0.68$ است که از تخصیص مجدد خروجی‌ها ناشی می‌شود. برای مثال واحد D در محیط غیر متمرکز، کارا است و هزینه کلش مشروط به خروجی ثابت تولید شده $7 * 1 + 12 * 0.2 = 9.4$ است. در محیط متمرکز، خروجی y_1 از واحد D ، ۳ واحد کاهش و خروجی y_2 از واحد D ، ۱ واحد افزایش یافته و هزینه آن $6 * 1 + 2 * 0.2 = 6.4$ است که در مقایسه با هزینه اصلی آن ۳ واحد کاهش داشته است.

جدول (۱۰) : نتایج مدل (۶) برای مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	X_1^*	X_2^*	Y_1^*	Y_2^*	CE
A	۷	۱۲	۴ (۲)	۱ (-۴)	۱
B	۱۲	۵	۴	۶	۱
C	۱۰	۷/۸	۴ (۱)	۴ (۲)	۱
D	۶	۲	۱ (-۳)	۳ (۱)	۱
E	۶	۲	۱	۳	۱
کل	۴۱	۲۸/۲	۱۴	۱۷	

حال اگر مثال براساس مدل (۷) حل شود می تواند واحدی را که نسبت به بقیه بهترین وضعیت را دارد مشخص کند. سود کل واقعی به این صورت $(14 * 4) + (17 * 3) - (42 * 1) + (35 * 0.2) = 58$ و حداکثر سود کل به این صورت $(20 * 4) + (36 * 3) - (60 * 1) + (25 * 0.2) = 123$ محاسبه می‌شود. در این صورت زمانی که همه واحدها کارای سود باشند سود کل از 58 به 123 افزایش می‌یابد. در این حالت با فرض این که مجموعه امکان تولید نمی‌تواند تغیر کند اگر همه واحدها مانند واحد B عمل کنند بیشترین سود را داریم.

جدول (۱۱): نتایج مدل (۷) برای مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	X_1	X_2	Y_1	Y_2	PE	X_1^*	X_2^*	Y_1^*	Y_2^*
A	۸	۱۰	۲	۵	۰/۶۲	۱۲	۵	۴	۶
B	۱۲	۵	۴	۶	۱	۱۲	۵	۴	۶
C	۹	۶	۳	۲	۰/۳۷	۱۲	۵	۴	۶
D	۷	۱۲	۴	۱	۰/۴۵	۱۲	۵	۴	۶
E	۶	۲	۱	۳	۰/۳۱	۱۲	۵	۴	۶
کل	۴۲	۳۵	۱۴	۱۷		۶۰	۲۵	۲۰	۳۶

در صورتی که یک تصمیم‌گیرنده مرکزی بتواند ورودی‌ها و خروجی‌ها را دوباره تخصیص دهد به طوری که سود کل تولید شده توسط همه واحدهای تصمیم‌گیرنده حداکثر شود از مدل (۹) استفاده خواهد شد. جدول شماره ۱۲ جواب‌های بهینه به دست آمده براساس مدل (۹) را نشان می‌دهد. از جدول شماره (۱۲) مشخص می‌شود که سود کل مدل (۹) را می توان با تخصیص مجدد ورودی‌ها وخروجی‌ها افزایش داد. سود کل قبل از تخصیص مجدد ورودی‌ها و خروجی‌ها $(14 * 4) + (17 * 3) -$

$(42 * 1) + (35 * 0.2) = 58$ و بعد از تخصیص مجدد $(14.01 * 4) + (22.62 * 3) - (41.15 * 1) +$ $(34.75 * 0.2) = 75.8$ خواهد بود.

جدول (۱۲): نتایج مدل (۹) برای مثال دو ورودی و دو خروجی

DMU	X_1^*	X_2^*	Y_1^*	Y_2^*	PE
A	۱۲	۵	۴	۶	۱
B	۶/۷۵	۹/۵۲	۳/۲۶	۱/۵	۱
C	۹/۳	۸/۴	۲/۶۵	۵/۳۲	۱
D	۷/۱	۱۰/۱	۲/۱	۴/۸	۱
E	۶	۲	۲	۵	۱
کل	۴۱/۱۵	۳۴/۷۵	۱۴/۰۱	۲۲/۶۲	

۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک رویکرد متمرکز برای تخصیص خروجی‌ها بر اساس کارایی هزینه در محیط تصمیم‌گیری متمرکز ارایه شد. هدف واحد مرکزی تخصیص مجدد خروجی‌های موجود در بین واحدهای تصمیم‌گیری است، به طوری که هزینه کل ورودی مصرف شده توسط همه واحدهای تصمیم‌گیری حداقل شود. مثال‌های عددی نشان می‌دهد که با اتخاذ یک دیدگاه متمرکز که اجازه تخصیص مجدد خروجی‌ها را می‌دهد، ممکن است به هزینه کل پایین‌تر در مقایسه با مدل هزینه غیر متمرکز معمولی دست یابیم. مدل تخصیص خروجی‌ها فرض می‌کند که همه واحدها پس از تخصیص خروجی‌ها کارای هزینه می‌باشند. به همین دلیل بعد از حل مثال با مدل تخصیص خروجی‌ها تمام واحدها روی مرز کارایی قرار می‌گیرند. سپس با ترکیب مدل کارایی هزینه و کارایی درآمد، مدل کارایی سود مطرح می‌شود برخلاف مدل‌های کارایی هزینه و کارایی سود که تنها بر روی خروجی‌ها و یا ورودی ها تمرکز می‌کنند مدل کارایی سود تلاش می‌کند تا به طور همزمان خروجی‌ها و ورودی‌ها را در نظر بگیرد با استفاده از این مدل می‌توان حداکثر سودی را که واحد تصمیم‌گیری می‌تواند به آن دست یابد به دست آورد.

۷.منابع و مآخذ

1. Kao, C. (2014). Efficiency decomposition for general multi-stage systems in data envelopment analysis.European Journal of Operational Research, 232, 117–124.
2. Kao, C. (2009). Efficiency measurement for parallel production systems. European Journal of Operational Research, 196, 1107–1112.
3. Amirteimoori ,A., Emrouznejad, A.,2012. Optimal input/output reduction in production processes, Decision Support Systems,52, 742–747.
4. Korhonen, P., Syrjänen, M.,2004. Resource Allocation Based on Efficiency Analysis. Management Science, 50(8): 1134-1144
5. Lozano,S., Villa, G., 2004. Centralised Resource Allocation Using Data Envelopment Analysis. Journal of Productivity Analysis, 22:143–161
6. Lozano, S., Villa, G., Brännlund,R.,2009.Centralised reallocation of emission permits using DEA. European Journal of Operational Research, 193(3): 752-760
7. Asmild, M., Paradi, J.C., Pastor, J.T.,2009. Centralised resource allocation BCC models. Omega,37, 40-49.
8. Lozano,S., Villa, G., Adenso-Diaz, B.,2004.Centralised target setting for regional recycling operations using DEA Omega, 32: 101-110

9. Lozano, S., Villa, G., Canca, D.,2011. Application of centralised DEA approach to capital budgeting in Spanish ports. Computers and Industrial Engineering, 60(3):455-465.
10. Yu, M.M., Chern, C.C.,& Hsiao, B.,2013. Human resource rightsizing using centralized data envelopment analysis: Evidence from Taiwan's Airports. Omega,41,119-130.
11. Lindebo,E., Hoff,A., Vestergaard, N.,2007. Revenue-based capacity utilisation measures and decomposition: The case of Danish North Sea trawlers. European Journal of Operational Research , 180:215-227.
12. Fang, L., Centralized Resource Allocation Based on the Cost-Revenue Analysis, Computers & Industrial Engineering (2015).