

PAPER DETAILS

TITLE: Oyun teorisi

AUTHORS: Faruk ALPASLAN

PAGES: 0-0

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/29766>

OYUN TEORİSİ

Faruk ALPASLAN*

KARAR MODELLERİNDEN OYUN TEORİSİ :

Herhangi bir şart altında ya da durumda karar vermenin esası iki ya da daha fazla faaliyet yahut olay dizisi arasındaki seçimdir.⁽¹⁾ Seçimde optimal kararı verebilmek için olaylar serisini çeşitli varsayımlarla içermek gerekir. Olayları bağımlı ve bağımsız değişken gruplarına göre sıralamak ve sonra sıra seçimleri yapmak gerekecektir.

Olaylar dizisi karar verme durumunda olan kişinin kontrolü altındaki bir ya da daha fazla inputlardan oluşur ve kararın sonucu sadece bu kişinin davranışına değil, kontrolü altında olmayan inputlara da bağlıdır. Her elverişli olayı " A_i " ile gösterelim. Kontrol edilemeyen değişkenleri de " B_j " ile gösterirsek her mümkün olay ve doğal durum değişkeni için tek bir sonuç, " S_{ij} " vardır. Bu ifadeleri bir matrix ile gösterebiliriz. ⁽²⁾

Karar matrix'i :

Doğal durum	B_1	B_2
Olaylar dizisi		
A_1	S_{11}	S_{12}
A_2	S_{21}	S_{22}

Oyunlarda tarafların her hamle sonunda birbirine ödedikleri veya ödemeye mecbur kaldıkları miktarlara oyun parası veya ödeme denir. Bir taraf ödese, diğer taraf alsa dahi alan tarafınki pozitif olmak üzere her iki tarafta ödedi veya ödemede bulundu denir. ⁽³⁾

(*) Atatürk Üniversitesi İşletme Fakültesi Doktora Öğrencisi.

(1) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları yayın no. 396-53. Sevinç Matbaası. Ankara 1975 s. 80

(2) Aynı eser, s. 80-81.

(3) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no. 730 Gümüşsuyu İst. 1968 s. 107.

Bu nedenle matrix'te "ödemeler matrix'i" yada "sonuç matrix'i" olarak isimlendirilir. (4)

Karar matrix'i ile herhangi bir seçme durumu karşısında karar vermenin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Herhangi bir olay ve buna bağlı olarak seçenек bir veya tek taraflı ise, konu ve seçenек hakkında karar verme yoluna gidilmez. Dolayısıyla olay tek yönlü ise ve problemin bu yönüyle ilgilenilmediği durumlarda ortada çözümü aranacak bir problem de kalmayacaktır. Olayın sonucu bütünüyle iyi veya kötüdür. O halde karar verme işlemi aşağıdaki gibi izah edilebilir. (5)

1 — Bir şahıs veya bir grup şahıslar için tercih etmek veya maksada uygun bir konu seçmek durumu vardır.

2 — Bu şahıslar, hadiselerin muhtelif durumları ile karşı karşıyadırlar. Bu yönlerden bazıları onlar için iyidir, isteklerine yakındır, diğer bazıları ise, onlar tarafından arzu edilmemektedir.

3 — Yine bu şahıslar, bu karşılaştıkları ve seçimini yapmak durumunda bulundukları konu ile yetinmeyip, bu konulardan en iyisini aramaktadırlar.

Aynı düşünceden hareket eden bir çok kişiler bulundukları durumlarda karar doneleri ışığında seçenekleri kullanmaya çalışacaklardır. Problemin çözümü bu çatışmalar arasında uzlaşmayı sağlamak olmalıdır. Bu uzlaşmanın saptanabilmesi de iyi bir şekilde belirlenmiş karar süreci ve unsurlarının dizilişine bağlıdır.

Karar verme sorununu ve sürecini oluşturan unsurların tümü göz önüne alınırsa izlenecek yöntemi belirlemek mümkündür. (6)

1 — Önce bir karar kriteri seçilir.

2 — Karar sürecinin mümkün sonuçları ile mümkün kararlar tanımlanır.

3 — Karar sürecinde ne tür olasılık dağılımının uygulanacağı saptanır ve karar matrix'inin inputlarına mümkün olan olasılık değerleri verilir.

4 — Faydayı ölçecek bir fonksiyon saptanır.

(4) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası, A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53 Sevinç matbaası. Ankara 1975. s. 81

(5) Jr. Hanshaw, R.C., K. Gülçür, Fazıl. İstatistik karar teorileri. İhtimaller - Belirsizlikler. İst. İ.T.A. Yayınları yayın no : 48-100 Berksöy mat. İst. 1969 s. 3

(6) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim ekonomisi ve Politikası. s. 83

- 5 — Karar seçenekleri için bir deney yapılır.
- 6 — Inputlara verilen olasılıklar gözden geçirilerek deney sonuçlarına göre gerekiyorsa düzeltme yapılır.
- 7 — Her mümkün karar için süreç inputlarının riski hesaplanır.
- 8 — Inputlara verilen olasılıklar kullanılarak her mümkün kararın umulan riski hesaplanır.
- 9 — Minimum umulan riskli karar optimumdur.

Olayları mümkün olan bütün yönleriyle düşünmek ve sonucunun ne olabileceğini tahmin etmek, sonra en iyisini seçmek tarafları ilişkili kılabilir. Bu nedenle oyun teorisi karar verenin veya seçim yapanın kazancını maxsimize, kayıplarını ise, minimize etmek esasına bağlıdır. Bu nedenle her bir tarafın belli stratejilerinin olacağı doğaldır.

Oyuncular oynamayı kabul ettiklerinde oyunun başlamasıyla kayıp ve kazançlarını düşüneceklerdir. Oyun esnasında tarafların birbirlerinin nasıl oynayacaklarından haberleri olmayabilir. Daha önce taraflar kendi aralarında aynı oyunu oynamışlarsa, deneysel tahminler olabilecektir. Taraflar oyunu, oyun kurallarına uyacak biçimde oynamalıdır. Uyulması gerekli olan hareketlerin tümüne oyun denir.

Tarafların belli bir oyunda seçecekleri hareketlerin tümüne strateji de denir. Diğer bir ifade ile strateji, bir oyuncunun eylemler setidir... Oyuncunun önceden belirlenmiş seçim yapma yöntemleridir. (7)

Stratejiler alt stratejiler olabildiği gibi alternatif de olabilir. Oyun sırasındaki hareketlerin bir kısmında bir oyun (alt strateji) diğerinde diğer bir oyun uygulanırsa, karma strateji izleniyor denilebilir. Oyuncu tarafından yalnız ve yalnız tek bir strateji hamlesi de olabilir. (saf strateji). Oyunda tarafların belli bir gayeleri vardır. Bu gayeleri gerçekleştirmedeki etkenliği ölçmek için yine belli bir ölçü seçilebilir. Bu seçilen ölçüye tesirlilik ölçüsü denir. Tarafların çeşitli stratejileri için birbirlerine yapacakları ödemelerin bir tablo halinde gösterilmesine oyunda ödemeler matrix'i adı verildiğini belirtmiştik.

Çok sayıda oyuncuların olması halinde matrix çoklu hatta uzay matrix'i olarak alınır. Bu gibi durumlarda stratejiler sonsuz limite gidecek ve optimal çözüm sonsuza akarak sonsuz değer alacaktır.

Ödemeler matrix'inde maximin ve minimax stratejilerde bulunabilir. Oyunda Max-min, matrix'te minimum değerli stratejilerden maxi-

(7) Aslan, Prof. Dr. Demir, Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53 Sevinç matbaası. Ankara. 1975 s. 84

mum olanını, min-max, maximum değerli olan stratejilerden minimum olanını seçmek demektir.

Oyun stratejisi gereği seçilen alternatiflerle seçim sonunda tarafların yaptığı ödemelerin toplamı sıfır veya sıfırdan farklı olabilir. Bunlara sıfır toplamlı ve sıfırdan farklı toplamlı ödemeler oyunu denir.

Oyunda oyuncuların seçenek sayıları eşit de olabilir. Bu gibi hallerde eşit olan iki taraflı oyunlara kare oyunlar, farklı olanlara farklı veya dikdörtgen oyunlar denmektedir. Oyunda ödemeler matrix'inin sıra minimumu ile kolon maximumu eşit olabilir. Eşitliğin meydana geldiği, yani $\max = \min$ olduğu noktaya denge noktası denir. Böylece matrix'lere de denge noktalı matrixler veya denge noktalı oyunlar denmektedir.

Oyunun çözümü, her oyuncu için en iyi stratejinin bulunmasıdır. En iyiden kasıt, ödeme durumunda olan oyuncunun ödenmesinin ki-matematiksel umutları minimum olduğu stratejidir. Başka bir deyişle, kazanan oyuncunun kazancını maximum yapan stratejisidir. (8)

OYUN TEORİSİ VE REKABET MODELLERİ :

Bir çok ekonomik problemlerde, problemin şartları tarafından empoze edilen belli sınırlamalara konu olmak kaydı ile çözüm maximum durumun tayini olarak belirir. Örneğin, bir tüketici bütçesinin dengede olması şartına bağlı olarak faydasını maximize etmek isteyebilir. Çoğu zamanlar problem alternatif olarak bir maximum veya minimum durum olarak ifade edilir. Bir firma belli bir input için maliyeti minimize eder veya belli bir maliyet için output'u maximize eder. Esas olarak çözüm doğrudan doğruya yapılabildiği gibi maximizasyon veya minimizasyon durumu da çözümde aranarak yapılabilir.

Serbest ekonominin, teorik de olsa, temel özelliklerinden birisi rekabet halidir. Bir işletmenin rakipleri vardır. Dolayısıyla de işletmenin iç problemlerine en iyi çözümleri bulması yetmeyecektir. Üstelik bu defa, umumiyetle kontrolü dışında olan rakiplere göre kendisini ayarlaması ve rakipleri karşısında kendisine mümkün maximum geliri (ödemeyi) temin edecek bir strateji tayin etmesi gerekecektir. (9) Son-

(8) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası. A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın No. 396-53 Sevinç matbaası. Ankara 1975. s. 85.

(9) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları Yayın No. 730 Gümüşsuyu İst. 1968 s. 106

ra bir rekabet piyasasında çok sayıda alıcı ve satıcı da olabilir. Böylesi bir piyasada her fert kendi maximum getirisini elde etmeye çalışırken diğerinin davranışlarından etkilenmez.

Aynı eşkilde tek satıcının veya çok alıcının bulunduğu veya bunun tersi bir monopol veya monopson problemler de basit olarak maximum durum şeklinde ifade edilir. Bununla beraber diğer ekonomik durumlarda, Nevman ve Magenstern tarafından (1944-1954) üzerinde durulduğu gibi oldukça farklı problemler doğar. Genellikle bu gibi haller bazı menfaat çatışmalarının mevcut olduğu ve çözülmesi gerektiği durumlarda ortaya çıkar. ⁽¹⁰⁾

Bu şahısların, işletmelerin bir olayda menfaatlerinin karşılanması (çatışmanın çözülmesi) halinde, kendi aralarında ikili yada çoklu oyun oynamalarından başka bir şey değildir. Eğer menfaat çatışması belli bir grupların arasında cereyan ediyorsa, örneğin; piyasada belli bir alıcı ile satıcı arasında ise, piyasanın veya grupların özellikleri belirlenmelidir. Şayet piyasada bir alıcı ile bir satıcı varsa ikili monopol, iki veya daha mahdut sayıda satıcı ile çok sayıda alıcı varsa düopol veya oligopol piyasalardan söz edilecektir. Buna benzer durumlar grev ve lokavt problemlerinde ve bu problemlerin çözümünde de olabilir. Üstelik ücretlerin bir grup tarafından tayininde problemin çözümü maximum ve minimum değerlerin bulunmasıyla da halledilemez. Bu tür problemler taraflar tarafından benimsenen stratejiler açısından daha karışık sorunlar ortaya çıkarır. Örneğin; sendika ücret tayininde işverene A ve B gibi alt ve üst sınır önermişse, işveren her iki sınır aralığında nasıl davranacağını ve en uygun ücretin ne olabileceğini bazı tahminlere dayamak zorunda kalacaktır. Buna benzer olarak, piyasada A ve B gibi iki satıcı varsa A davranışlarını B nin ne yapabileceği üzerindeki bazı tahminlere göre satışını planlamak zorundadır.

Herhangi bir davranış veya strateji gözönüne alındığında A, B nin yaptığına aksine bir davranışa kalkışabilir. O halde A, B nin tepkisinin en kötüsüne müsaade ederek en iyi strateji için karar verir. Aynı zamanda B de A ninkine benzer bir görüşle kararını verir. Böylece her iki tarafın da davranışları bir minimum veya maximum kararın beraberce bulundurulduğu min-max görüşe dayandırılmış olacaktır. Daha sonra tarafların çeşitli davranışlarının belirli bir sonucunun olup olmadığı, yani A nin min-max durumunun B nin min-max durumuyla uyup uymadığı sorusu ortaya çıkacaktır. ⁽¹¹⁾

(10) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and co LTD New York. St martin's press. 1956. s. 493

(11) a.g.e., s. 493-494.

OYUN TEORİSİ MATEMATİĞİ :

Matematiğin genellikle konusu kontrolsüz değişkenlerdir. Yani kendi kararımızla gözönünde tutulan sistemde yapılan değişiklikler sonunda belirlenemeyen değişkenlerdir. Matematiksel problemlerde oyun teorisinde bu şekilde gözden geçirilir. Eğer oyunda iki şahıs varsa, taraflar kurallara uygun olarak oynamak ve stratejiyi sayısal olarak buna uydurmak zorundadırlar.

Bu şekilde oynanan bir oyunda, oyunculardan her biri kendi kazancını veya puanını maximize rakibininkini minimize etmeye çalışır. Oyunun herhangi bir optimum veya sabit sonucunun olup olmaması diğer oyuncununkine bağlı olacak biçimde bir oyuncu tarafından min-max duruma hedef olarak alınıp alınmamasına bağlıdır. Bu nedenle de oyun teorisinin ekonomik problemlerle ilgisi vardır. ⁽¹²⁾

Böylece, oyun teorisi basitte olsa, matematiksel terim veya ifadelerle formülize edilebilir. Belli bir grupta hangi ekonomik problemlerin bulunduğuna teknik ilişkiler şebekesi şeklinde de tanımlanan matematiksel oyun teorisi yardım eder.

Doğrusal programlama ile bilinen daha genel ekonomik problemler veya hareket analizleri oyun teorisinin ekonomik uygulama alanı içinde bulunur.

İyi bir ekonomist, istatistik uzmanı, problemin en ince noktasına kadar basit hükümler ile yetinebilir. Fakat daha karmaşık problemlerde onlar matematiksel oyun teorisini kullanmakla fayda sağlarlar. ⁽¹³⁾

İKİ ŞAHIS - SIFIR TOPLAM OYUNU VE ÖDEMELER MATRIX'İ :

Bu tür oyunlarda önceden kabul edilmesi gereken varsayımlar vardır. ⁽¹⁴⁾ Bunlar;

- 1 — Her şahıs olaylar dizisinin diğer şahıs için de var olduğunu bilir.
- 2 — Her şahıs olaylar dizisini ve almasıklarını bilir.
- 3 — Her şahıs maximin yada minimax ölçüsünü kullanır.

(12) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London, Macmillan and co LTD New York. St martin's press. 1956 s. 494

(13) Yukarıda adı geçen eser, s. 494

(14) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve Politikası, A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları, Yayın No. 396-53, Sevinç matbaası, Ankara, 1975 s. 86

Oyunda herhangi bir hareket noktası oyuncularını çeşitli alternatiflerle karşı karşıya getirebilir. Oyunun oynanmasında seçim reel alternatiflerin toplamıdır. Ödemeler, her bir hareket sonunda (hamle) oyunun sonuçlarına uygun olarak yapılır. Kaldiki ödemelerin para veya puanla olmasının hiç bir önemi yoktur. Oyunda ikiden fazla oyuncu varsa, onların herhangi birinden diğerlerine para veya puan olarak ödemelerin yapılması gerekir.

Oyunun sonunda iki şahıs sıfır toplam oyununda, oyuncu A oyuncu B den a kadar net bir miktar alırken, buna eşit olarakta oyuncu B de oyuncu A dan $a = b$ kadar net bir miktar alacaktır. Böylece A nın a kadar pozitif bir kazancı olurken, B nin a kazancına eşit $-b$ kadar bir kaybı olacaktır. Burada dikkat edilmesi gereken husus her iki oyuncu arasında olan devamlı bir ödemeler devridir. Bu devir A dan B ye olabildiği gibi ters olarak B den A ya doğru da olabilir. Pratikte daha çok kullanılan oyun şekli budur. Örneğin; Briç, iki şahıs sıfır toplam oynudur. Oyunda dört şahıs vardır. Oyuncular eşli olarak (çift-çift) oyunu oynayarak kazanç ve kayıplarını rölant ederler.

Fakat oyunda iki şahıs dahi olsa iki şahıs sıfır toplam oyunları sonlu değişkenlidirler. Hareketlerin sayıları sonlu olup, her bir hareket sayısı alternatifleri açıklar.

Oyun esnasında herbir oyuncu mevcut bilgi değerlerini değiştirebilmelidirler. Örneğin; kurallara uygun olarak oynanan bir oyunda önceden tesbit edilen veya hareket ettirilen bilgi, sadece iki sıfır toplam oyunlarında ortak olan, iki oyuncu arasındaki menfaat çatışmalarıdır. Ve bu çatışmalarda birinin kazançlarının diğerinin kayıplarının sonuçta ne olacağıdır? ⁽¹⁵⁾

Oyunda her bir hareket ve alternatiflerin sonlu sayıları olduğunu belirtmiştik. Oyunun sonlu olması halinde oyuncuları belirleyen stratejiler sayılabilir. Bu fikirler sadece oyunun oyuncu açısından değil, gelişmedeki sınırlamalar açısından da önemlidir.

Konvex setlerin matematiksel araştırması yüksek düzeyde gelişmiş olarak oyun teorisinde vardır. Konvex set teorisi matematiğin branşı değildir. Bununla beraber oyun teorisinde elde edilmeye çalışılan yaklaşımlar basit ve fakat geneldir. Basit teknik hesaplamalar 1952 yılında Mc Kinsey ve 1954 yılında Williams tarafından herkesce sevilen ve benimsenen biçimde geliştirilmiş olarak verildi. ⁽¹⁶⁾ Kural-

(15) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and co LTD New York. St mortin's press. 1966 s. 495

(16) Adı geçen eser s. 496

lara uygun olarak oynanan bir oyunda iki şahıs (A ve B) varsa, A, m stratejilerini seçerken ($r = 1, 2, \dots, m$) B de n stratejilerini seçer ($s = 1, 2, \dots, n$). Otomatik olarak bir defasında A, B nin, B de A nın stratejilerini seçer.

Oyunculardan herhangi birisi diğerinin stratejisini seçerken kendi stratejisinden vazgeçme zorundadır. Böylece her bir oyuncunun stratejileri numaralandığı gibi sayılma olanağıda bulunabilecektir. Oyunda bir hamle varsa, numaralama işlemi basit olarak yapılır ve buda yeterlidir. Hareket anında A, sonlu alternatif sayıları tercih ederse ($r = 1, 2, \dots, m$) B de açıkça sonlu alternatif sete sahip olacaktır. ($s = 1, 2, \dots, n$) Oyun kurallarına uygun olarak demekki; A, r sayısını B de s sayısını sabit olarak tercih edecektir.

Herhangi bir oyunda bütün farklı stratejileri pratik olarak numaralamak zor olabilir. Fakat bu işlemin yapılmasında bütünyle kavramsal olunulsa bile güç değildir. Müsaade edilmiş oyunda A tarafından seçilmiş r. nci strateji ve B tarafından seçilmiş s. nci strateji oynanabilir. Oyunda B olan A tarafından alınan $[a_{rs}]$ miktarı olmalıdır ki, karar verilen r ve s de $[a_{rs}]$ de positif-negatif veya sıfır olabilsin.

Oyunda, $(m \times n)$ farklı yollarla oynamak için ve her bir oyuncunun sonlu ödemeleri a_{rs} ($r = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, n$) vardır. Bu miktarlar A nın ödemeler matrix'inde düzenlenmiştir. (17)

$$A = [a_{rs}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Burada B için ödemeler matrix'i $B = [b_{rs}]$, $b_{rs} = -a_{rs}$ Böylece $B = -A$ dir

Şimdi ödemeler matrix'inin yorumunu yapmaya çalışalım. Sıralar, A tarafından seçilen alternatif birimleri gösterir. Ayrıca A nın her bir stratejisi için bu sıraların toplamı m dir. Sütunlar ise B tarafından seçilen alternatif birimleri belirler. B nın her bir stratejisi için kolonların toplamı n dir. Yukarıdaki matrix'te sıra ve sütunlar toplam a_{rs} şeklinde gösterilmiştir.

Yukarıda açıklamaya çalıştığımız iki şahıs sıfır toplamı oyun teorisinin daha iyi anlaşılması için bir örnek çözüm yapalım.

A ve B gibi iki oyuncu olsun. A nın stratejileri m_1, m_2, m_3 B nin stratejileri n_1, n_2, n_3 olarak kabul edilsin. Şayet A kendi m_1 strate-

(17) D. Allen, R. G. Mathematical Economics. London, Mac millan and co. LTD. Newyork. St martin's press. 1956. 2. 496

jisini seçerse B ye 10 TL, B kendi n_1 stratejisini seçerse A ya 5 TL ödüyor. A kendi m_2 stratejisini seçerse B ye 5 TL, B kendi n_2 stratejisini seçerse A ya 15 TL ödüyor. A kendi m_3 stratejisini seçtiğinde B ye 5 TL, B kendi n_2 stratejisini seçtiğinde A ya 10 TL ödüyor. Bu durumda A ve B nin optimal stratejisi nedir?

Yukarıda verilen doneleri tablo halinde gösterelim.

Oyuncular				A ve B nin ödemeleri	
St.	A	B			
	m_1	—	$m_1 n_1$	A→B	10 TL.
	m_2	—	$m_1 n_2$	B→A	10 TL.
	m_3	—	$m_3 n_1$	A→B	5 TL.
	—	n_1	$m_3 n_2$	A→B	10 TL.
	—	n_2	$m_3 n_1$	B→A	15 TL.
	—	—	$m_3 n_2$	B→A	10 TL.

Şimdi ödemeler tablosunu düzenleyelim.

		oyuncu B	
Oyuncu A	Seçim	n_1	n_2
	m_1	- 10	10
	m_2	- 5	15
	m_3	5	20

Her iki tarafta kazancını maximum kılmaya çalışacaktır. B oyuncusunun n_1 ve n_2 diye iki hareket tarzı vardır. n_2 ödemeleri daima pozitiftir. Dolayısıyla B, n_2 yi seçmeyecek daima n_1 i seçecektir. Bu A için $r_A = + 10$ dur ve A nın en düşük değeridir. O halde oyunun minimum değeri + 10 dur. Yani $\min_{SB} = +5$ dir. En yüksek değerler ise tek olup $\max_{SB} = - 10$ dur. Bu A için $r_A = + 10$ dur. Ayrıca A için en düşük değerdir. O halde A nın optimal stratejisi m_3 , B için optimal strateji n_1 dir. Bu stratejilerin seçimi halinde oyunun değeri 5 dir. İki Şahıs-Sıfır Toplam oyunlarından beklenen ve oyunda saf ve Karma **Stratejiler** (Oyunun olasılığı, saf ve karma stratejileri) :

Klasik yada objektif anlamda olasılık, birbirine benzemeyen ve belirlilik ile kişisel olarak tahmin edilemeyen, fakat oransal frekanslar şeklinde tanımlanabilen bir tekrarlama sürecidir. Daha teknik bir deyimle olasılık, bir radyom serisinde, denemeler sonsuza yaklaştığında frekansın limit değeridir. (18)

(18) Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekanomisi ve Politikası, A.Ü. İşletme Fakültesi yayınları. YYayın no: 396-53. Sevinç Matbaası Ankara. 1975 s. 99

Olasılık kavramı her an rastlanan ve en çok kullanılan kavramdır. Olasılık teorisi kesin ispatın mümkün olmadığı durumlarda kullanılır. Kesin neticeye ulaşmanın sağlanamadığı problemler hakkında kararların tümünün gerçekleşme oranı matematiksel karar ve umutların derecesini belirten ve değerlendiren tüm kuralları içerir. O halde problem hakkında kesin hükme varmak için eldeki bilgi ve donelerin noksan olduğu hallerde olasılıklar teorisi uygulanır.

Herhangi bir olayın olasılığı genellikle $E(A)$ şeklinde ifade edilir, ve $E(A) = A$ şeklinde gösterir. A olayının tekrarlanma sayısı 1,2, ∞ kadar gidebilir. Tekrarlanan olayın deneme sayısı, değişkenlerden bir veya birkaçının değişken olarak olasılık dağılımında bulunan değeriyle ters orantılıdır. Yani tekrarlanan olay sayısı toplam olarak X_i ise, deneme sayısı bir defada $1/n(X_i)$ ile ifade edilir. Demek ki bir A olayının tekrarlanma sayısı limite yaklaştığında olayın olasılığı;

$$E(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ olmaktadır.}$$

Buradan da $\lim \sum X_i/n$ bağıntısı yazılabilmektedir.

Bir şans sürecinin işleyişinden doğan bir kütle $A + B$ elementlerinden oluşur veya oluştuğu varsayılır. Bir element radyom olarak seçilmiş ise başarı olasılığı $A/A + B$ dir. Yani başarı sayısının bütün kütle sayısına oranıdır. (19)

Oyunlarda tarafların karşı stratejiler ışığında kayıpları veya kazançları umumiyetle farklı olmaktadır. Bu bakımdan da mümkün en az kazançların en büyüğüne tekabül etmek üzere maximum ve mümkün en fazla kayıpların minumuma tekabül etmek üzere minimax kavramları kullanılmakta, bu mefhumlarda bu tip oyunların kolayca çözümlerini bulmakla kullanılmaktadır. (20)

Oyunlarda olasılığın toplam maximum değeri 1 olmaktadır. Yani $E(\sim A)$, A olayının vuku bulmama olasılığı ise, diğer bir deyişle oyuncu A nın başarısızlığı ise toplam daima sıfırdan büyük olmalıdır.

$$E(A) + E(\sim A) = 1$$

(19) Aslan, Prof. Dr. Demir, Üretim Ekonomisi ve Politikası, A.Ü. yayınlar yayın no: 396-53 Sevinc matbaası, Ankara. 1975 s, 99

(20) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami, Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no: 730 Gümüşsuyu-İşt. 1968 s. 109

Olaylar serisi sonsuza kadar gidebilir. Bu taktirde olaylar toplamının olasılı değeri yine 1 e eşit olacaktır.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \text{ veya } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum X_i}{n} = 1 \text{ olmalıdır.}$$

A olayının olasılığı ile, A olayının vuku bulmama olasılığının 1 e eşit olması iki değişken arasında linear ilişki doğurur.

$$E(A) + E(\sim A) = 1 \text{ buradan}$$

$$E(A) = 1 - E(\sim A) \text{ veya } E(\sim A) = 1 - E(A)$$

Olaylar serisinde iki olay varsa bunların olasılı toplamalarının olasili vuku bulmama toplamalarına eşit olacağı söylenebilir,

$$E(A \text{ veya } B) \text{ olayları varsa;}$$

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B) \text{ buradan}$$

$E(A \cap B) = [E(A) + E(B)] - [E(A) + E(B) - E(A, B)]$ A, B $\in E$ olmak üzere, iki olayın çarpımları bireysel olasılıkların çarpımına eşittir.

$E(A \cup B) = E(A) + E(B) - E(A, B)$ olayları birbiri ile bağımlı ise, yani $A \leftrightarrow B$ ise, o taktirde olayların olasılı oranları bağılı olayla çarpılacaktır.

$$E(A \cap B) = E(A) \cdot E(B/A) \text{ buradan}$$

$$E(B/A) = E(A \cap B) / E(A) \text{ bulunur, } A \rightarrow B \text{ ise,}$$

$E(B/A) = E(B)$. $E(A/B) : E(A)$ yazılabilir. Buradan marjinal olasılık bulunabilir.

$$E(B) \cdot E(A/B) = E(A \cup B) - E(A) \cdot E(A/B)$$

$E(A \cup B) = E(A) + E(B) - E(A, B)$ idi. O halde yukarıdaki eşitlik,

$$C = E(A) + E(B) - E(A, B) \cdot E(A/B) \text{ Şeklinde yazılabilir.}$$

$$C = E(A) [1 - E(B)] + E(B) \cdot E(A/B), \quad E(A/B) = E(A) / E(A)$$

(A). E(B) yazılacak olunursa,

$$C = E(A) [1 - E(B)] + E(B) \cdot E(A) / E(A) \cdot E(B) \text{ buradanda}$$

$$C = E(A) [1 - E(B)] + E(B) \cdot E(A) / E(A) / E(B)^{-1} \text{ ve}$$

$$C = E(A) [1 - E(B)] \text{ bulunur.}$$

$$1 - E(B) = P(\sim B) \text{ dir, O halde } E(A) = P(\sim B) \text{ bulunur.}$$

$$E(A) P(\sim B) = E(A, B) + E(A, \sim B) \text{ dir.}$$

Olasılık dağılımının matematiksel ortalaması oyunun beklenen

$$\text{değeridir ve } MU = \sum_{i=1}^n U_i E_i \text{ ile gösterilir.}$$

A ve B oyuncularının ödeme matrix'i aşağıdaki gibi olsun :

B \ A	A	B	T
	A	B	T
A	5	10	15
B	15	18	33
T	20	28	58

Şimdi her bir oyuncunun oyunda kazanma olasılıklarını bulalım.

$$E(A) = 20/58 = 10/29 \quad A \text{ nın kazanma olasılığı}$$

$$E(B) = 28/58 = 14/29 \quad B \text{ nin kazanma olasılığı}$$

$$E(A, A) = 5/58$$

$$E(B, \sim A) = 18/58 = 9/29$$

$$E(A, \sim A) = 15/58$$

$$E(A) = E(A, A) + E(A, \sim A) = 5/58 + 15/58 = 20/58$$

$$E(A/A) = E(A, A) / E(A) = 5/20 = 1/4 = 0,25$$

$$E(A, A) = 5/58 \text{ idi. Buna karşılık B nin A ya göre oynaması}$$

halinde;

$$E(B, \sim A) = 18/58 = 9/29$$

Marjinal olasılık ise;

$$E(A) = E(A, A) + E(A, \sim A) = 20/58$$

Şartlı olasılık ise;

$$A \text{ nın oynadığını varsayarak: } E(A/A) = E(A, A) / E(A) = 5/20 :$$

$$20/28 = \frac{1}{4}$$

B nin oynadığını varsayalım :

$$E(B/B) = E(B, B) / E(B) = 10/28 = 5/14 \text{ bulunur.}$$

Eğer oyunda ödemeler matrix'i $A = [a_{rs}]$ ($r = 1, 2, \dots, m$) ise, her iki oyuncu tarafından seçilen stratejilere uygun $s = 1, 2, \dots, n$ olarak oyuncu A vasıtasıyla ödenen miktar a_{rs} olur demiştik. B nin amacı E yi mümkün olduğu kadar küçük yaparak rakibinin strateji modelini seçmektedir.

Oyuncu A veya B bir tek strateji seçiyorlarsa, seçilen strateji her iki oyuncunun saf stratejisidir. Oyuncu A saf stratejisini tekrar tekrar oynarsa, ayrıca oyuncu A benzer stratejileri seçmişse bu taktirde rakibinin bütün alternatiflerini oyunda açıklayacaktır. Şayet oyun-

da A ve B kendi saf stratejilerini seçmişlerse oyunu kurallara uygun olarak oynasalar bile hiçbirine benzemeyecektir.

Oyuncu A, B nin stratejileri için r_{ih} , B, A nin stratejileri için s_{ih} değerini ödemeler matrix'ine adapte eder ve bu a_{rs} ile gösterir. Böylece bu durumun eşitlik değeri (fonksiyon olarak ve herbir oyuncu için);

$$E(r, s) = a_{rs} \quad (r = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, n) \text{ yazılabilir.}$$

A, amaç olarak r yi seçtiği zaman E mümkün olduğu kadar genişler Basit bir ifade ile eğer B, s yi seçerse A tarafından seçilen r ile E yi mümkün olduğu kadar küçültmeye teşebbüs eder. (21)

Sorun, r ve s nin hangi seçimlerle optimal olacaktır. Bu nedenle çözüme gidilirken saf stratejiler alınmaya çalışılır. Saf stratejilerin kullanımıyla oyun teorisinin çözümü enteresan değildir. Oyun setinde oynama esnasında kesif alanlarda optimal sonuç elde edilebilir.

Daha önemli sorun, kurallara göre oynanmış oyunda her bir oyuncunun adapte ettiği farklı stratejilerde, birbirini izleyen oyunları aramalarıdır. Eğer bir oyunda karma strateji varsa, karma strateji içeren oyun kurallara göre oynanmış oyundan başka diğer birçok modelleri de birleştirir. Bu model açısından problemlere bakıldığında tarafların strateji düzenlerinin yerinde olmadığı görülür. Bu gibi hallerde stratejiyi oransal olarak görmek yerine tesadüfi değişken kombinasyonları teşekküllerine getirmek yerinde olacaktır. Diğer bir ifadeyle strateji oluşmaları yerine bu gibi hallerde tesadüfi oluşmalar daha çok olacaktır. Örneğin; modelde oynanabilecek 20 strateji varsa, oyunculardan herhangi birisi birinci stratejiyi oynamak istediğinde, 20. nci stratejiyi oynamak yerine 21. nci stratejiyi seçmek isteyebilir. Dolayısıyla tahminde E daha çok karmaşık olur.

İki oyuncunun stratejilerinin nasıl ve ne biçimde olacağı hususunda oyuncuların ödeme değerlerine bağlı olarak karma strateji çözümleri olabilir. İki değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi bağımlı olan bu değişkenlerin formüle edilmesi kolay olmaktadır.

Birçok hallerde bir oyuncunun birtek stratejiyi takibetmesi en iyi neticeyi vermez. Bu durumda hiç bir tepe noktası (oyunlarda taraflar için en iyi bir veya birkaç strateji noktası) mevcut değildir

(21) D. Allen, R.G. Mathematical Economics, London, Macmillan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956. s. 499

Böyle durumlarda her bir oyuncunun kazancını azami kılması veya kayıplarını minimum kılması için bir karma stratejiye yönelmesi zaruri olabilir. (22)

Karma strateji mevcut olan oyunlarda muhtelif stratejilerin oranı bulunduğundan sonra, bu nisbeti oyunun değerine eşit kılan tesadüfi değişkenler setinin sayısal olarak bulunması gerekecektir. Yukarıda ifade etmeye çalıştığımız karma strateji kavramını bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Oyunda tepe noktası yoksa ve A bir zaman periyodu içerisinde α , diğer zaman periyodu içerisinde β yı, B ise α, β oynadıkları varsayılırsa. Ödemeler matrix'i aşağıdaki gibi olur.

B \ A	α'	β'
	β	α
β	2	4
α	5	9

Oyun modeli :

$$a - (\alpha + \beta) \cdot \alpha'$$

$$b - (\alpha + \beta) \cdot \beta' \text{ olacaktır.}$$

Bu modele bağlı olarak A'nın beklenen kârını bulalım;

$$a) A = 1(2) + 1(5) = 7$$

$$b) A = 1(4) + 1(9) = 13$$

Modelde B'nin karma stratejisinin olduğunu kabul edelim. Böylece bu problem modele uygulanırsa;

$$(\alpha + \beta) \alpha' + (\alpha + \beta) \beta'$$

$$1[1(2) + 1(5)] + [1(4) + 1(9)] = 20$$

Zaman periyodlarını belli oranlarda parçalara ayırdığımızda $(1/2, 1/4, \dots, 1/2^n)$ yukarıdaki modelimiz aşağıdaki şekli alacaktır,

$$a) \frac{1}{2^{n-1}} (\alpha + \beta) \alpha'$$

$$b) \frac{1}{2^{n-1}} (\alpha + \beta) \beta'$$

(22) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması, İ.T.Ü. yayınları yayın no: 730 Gümüşsuyu-İst. 1968 s. 114

Oyunu B, A ya benzer şekilde tesadüfi olarak $1/2$ zamanında β' oynadığı zaman, karma stratejinin modele uygulanmasıyla yukarıda bulunan değer düşürülen zamanla orantılı olarak azalacaktır.

$$1/2 [1/2 (2) + 1/2 (5)] + 1/2 [1/2 (4) + 1/2 (9)] = 1/2 (3.5) + 1/2 (6.5) = 5$$

Çeşitli stratejilerin farklı nisbetlerde seçilmesi halinde A'nın oyun değerini bulmaya çalışalım. (oyun değeri E)

$$A (1/4 \alpha + 3/4 \beta) \quad B (1/3 \alpha' + 2/3 \beta')$$

$$E_1 (A) = 1/3 [1/4 (2) + 3/4 (5)] + 2/3 [1/4 (4) + 3/4 (9)] = 79/12 = 6.58$$

Veya;

$$E_2 (A) = 1/4 [1/3 (2) + 2/3 (4)] + 3/4 [1/3 (5) + 2/3 (9)] = 6.58 \text{ (yaklaşık olarak) bulunur.}$$

Oyuncu A ve B için optimal karma stratejilerin tesbiti de gerekmektedir. Model a ve b den A'nın kazancı 7 ile 13 lira arasında değişmektedir. Oyuncu acaba asgari kazanç olarak kaç lirayı elde edecektir? Oyunda A'nın kazançlarının maximumu aranırken, B'nin kayıplarının da minimum olması saptanmalıdır. O halde maximum kayıpları bulabilmek için B için karma stratejilerin tayini gerekmektedir.

Yukarıda verilen oyun matrix'inde :

$$\begin{aligned} A &= yx\alpha_s + (1-x)\beta_s \dots\dots\dots x \quad B \text{ nin daima optimal stratejisini} \\ E(A \rightarrow \alpha') &= x(2) + (1-x)5 \dots\dots \text{uygulaması hali.} \\ &= 2x + 5 - 5x \\ &= 5 - 3x \end{aligned}$$

Öyle bir A stratejisi ki B ne olursa olsun veya B neyi oynarsa oynasın minimum kar maximum kılınmış olacaktır.

$$\begin{aligned} E(A \rightarrow \beta') &= x(4) + (1-x)9 \\ &= 4x + 9 - 9x \\ &= 9 - 5x \end{aligned}$$

$A(x_i)$, $g(A \rightarrow \alpha) = g(A \rightarrow \beta')$ olacak şekilde seçerse, bu karma stratejinin, yani $x_0 \cdot \alpha + (1-x_0)\beta'$ en iyi strateji olacağı matematiksel olarak ispat edilebilir.

Problemde esasen B'nin α yımı yoksa β yımı oynayacağını bilemiyoruz. O halde :

$$\begin{aligned} E(A \rightarrow \alpha') &= E(B \rightarrow \beta') \text{ yazılabilecektir. Yukarıdaki değerler birbirine eşit kılınırsa;} \\ 5 - 3x &= 9 - 5x \quad \text{buradan } x = 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$E(A_B \rightarrow \alpha') = 2(2) - 1(5) = -1$$

$E(A_B \rightarrow \beta') = 2(4) - 1(9) = -1$ bulunur. Şimdi irdelemesini yapalım.

$$E \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} (1/4 + 3/4) = 3/4 \begin{bmatrix} 2(4) + (1-2)(9) \end{bmatrix} + 1/4 \begin{bmatrix} 2(2) + (1-2)(5) \end{bmatrix} = 3/4(8-9) + 1/4(4-5) = -1$$

veya

$$E \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} (1/4\alpha' + 3/4\beta') = 3/4 \begin{bmatrix} 2(4) + 2^{-2}(9) \end{bmatrix} + 1/4 \begin{bmatrix} 2(2) + 2^{-2}(5) \end{bmatrix} = -1$$

bulunur.

$x = 2$ olduğundan $1-x = 1-2 = -1$ dir. Yani x değer değişkeni $x, x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n}$ kadar akmaktadır. Oyun olasılığının değeri 1 olmalıdır. Bu değer olasılığının oransal frekans gerçeğine temel olmaktadır. Burada değer $x < 0$ olduğundan her iki oyuncu için risk altında karar verme söz konusudur. Örnekte netice olarak $A = [2, 2^{-2}, (-1)]$ dir. Yani A oyuncusu risk altında karar verirken $2\alpha', -\beta'$ stratejisiyle kendisine -1 lik bir minimum zarar getirecektir. Oyuncu A, hangi stratejiyi seçerse seçsin kâr elde edememektedir. Aynı metodolojiyi B nin azami kaybını verecek stratejinin tesbitinde de kullanabiliriz.

k modele sokulan tekrarlamayı gösterebiliriz, Bu halde

$B[k\alpha' + (1-k)\beta']$ en iyi stratejiyi verecektir.

$$E(B_A \rightarrow \alpha) = k(2) + (1-k)(4) = 2k + 4 - 4k = 4 - 2k$$

$$E(B_A \rightarrow \beta) = k(5) + (1-k)(9) = 5k + 9 - 9k = 9 - 4k$$

$$4 - 2k = 9 - 4k$$

$$4 - 2k - 9 + 4k = 0 \text{ buradan } k = (5/2) \text{ bulunur. O halde}$$

$B[(5/2)\alpha + (-3/2)\beta]$ yazılabilir. $(1-k) = (1-5/2) = -3/2$

$$E(B_A \rightarrow \alpha) = 5/2(2) - 3/2(4) = 5 - 6 = -1$$

$$E(B_A \rightarrow \beta) = 5/2(5) - 3/2(9) = 25/2 - 27/2 = -1 \text{ veya}$$

$$E(B_A \rightarrow \alpha) = 2^{-5}(2) - 2^{-3}(4) = -1$$

$E(B_A \rightarrow \beta) = 2^{-5}(5) - 2^{-3}(9) = -1$ bulunur. Oyun modeli sıfır toplamı olduğu için kural olarak $E_A = E_B = -1$ bulunmuştur. O halde oyunun çözümü : Çözüm kominasyonları,

$$A (2\alpha - \beta) \rightarrow A (2\alpha - \beta)$$

$$B (5/2\alpha, -3/2\beta) \rightarrow B (5\alpha - 3\beta/2)$$

$$E_A = E_B = -1$$

E nin formülize edilmesinde iki strateji değişkeni vardır. Oyuncuların herbiri iki stratejiye sahiptir. Ödemeler matrix'i ise 2x2 şeklindedir. Yani,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ Şeklindedir.}$$

Oyuncu A, oyuncu B nin stratejilerini karma kılabilir. Birinci kararın tayininde x, ikinci kararın tayininde (1 - x) oynanır. (Örnekte olduğu gibi)

A ve B için seçilen n kombinasyonlar ödemeler stratejisinde N oyunla çarpılır.

$$\begin{bmatrix} xyN & x(1-y)N \\ (1-x)yN & (1-x)(1-y)N \end{bmatrix}$$

oyuncu A tarafından her bir oynamada alınan ortalama miktar (23)

$$E(x, y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y) \dots\dots\dots$$

$$0 \leq x, y \leq 1 \text{ veya } 0 \leq y, x \leq 1$$

$$E(x, y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y) \dots\dots\dots$$

Denklemleri çözülürse :

$$E(x, y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy - (a_{21} - a_{12})x - (a_{22} - a_{21})y + a_{22}$$

bulunur. Burada $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Butaktirde buradan da;

$$a = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = 0$$

$$b = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} / a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$$

$$\alpha = a_{22} - a_{21} / a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \text{ ve}$$

$$\beta = a_{22} - a_{12} / a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \text{ bulunur.}$$

Bu ikinci dereceden hiperbolik bir fonksiyondur. Fonksiyonda

$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = 0$ kabul edilecektir. Bu değerlemeyi bir örnekle açıklayalım. Ödemeler matrix'imiz

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

(23) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Macmillan and co LTD New-york. St martin's press. 1956 s. 500

Bu matrix'te $(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) = 0$ şartını arayalım.

$a_{11} = 5, a_{12} = 6, a_{21} = 2, a_{22} = 3$ dır.

$5 - 6 - 2 + 3 = 8 - 8 = 0$ bulunacaktır. Genel denklemimiz:

$E(x, y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) xy - (a_{22} - a_{12}) x - (a_{22} - a_{21}) y + a_{22}$ idi.

Bu denklemde,

$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) =$ yerine konulursa yukarıdaki denklemi şöyle yazabiliriz.

$E(x, y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) xy - (a_{22} - a_{12}) x - (a_{22} - a_{21}) y + a_{22}$

$E(x, y) = (a_{22} - a_{12}) x - (a_{22} - a_{21}) y + a_{22}$ burdan

$a - E(x, y) = a_{22} - (a_{22} - a_{12}) x - (a_{22} - a_{21}) y$

$b - E(x, y) = a_{22} (1 - x) - y (a_{22} - a_{21}) + x a_{12}$ yazılabilir.

Yukarıda bulunan bağıntıyı bir örnekle açıklayalım.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrix'i verilmiş olsun.

$a - E(x, y) = -1 - (-1-1) x - (-1-0) y$
 $= 2x + y - 1$

$b - E(x, y) = -1 (1 - x) - y (-1-0) + x (1) = 2x + y - 1$

$E(x, y) = a_{11} xy + a_{12} x (1 - y) + a_{21} ((1 - x) y) + a_{22} (1 - x) (1 - y)$

$E(x, y) = -xy + 1 \cdot x (1 - y) + 0 (1 - x) y - 1 (1 - x) (1 - y)$
 $= -3xy + 2x + y - 1$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$$E(x, y) = -4 \left(x - \frac{5}{4} \right) \left(4 - \frac{3}{4} \right) + \frac{7}{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$E(x, y) = x - 4y + 2$ yazılır.

Oyunlarda ikiden fazla strateji bulunabilir. Böyle oyun matrixlerine $(m \times n)$ oyun matrix'i denir. Oyununda genel adı dikdörtgen oyunudur. Yukarıda kısmende olsa bu konuya değinilmiştir. Oyuncu A'nın stratejileri $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ ve oyuncu B'nin stratejileri $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ olabilmektedir.

B \ A	A			
	1	2		m
1	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}		a_{2m}
...				
n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nm}

Matrix'in özellikleri :

a — Her dikdörtgen oyununun tek bir oyun değeri vardır.

b — B oyuncusu s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tekrarlamalarını yapmak ve mümkün olan stratejileri $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ olmak üzere ($s_1 A_1 + s_2 A_2 + \dots + s_n A_n$) şeklinde bir karma strateji ile, kendine en az kazancı sağlayabilir.

c — A oyuncusu içinde r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ($r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_m = 1$) olmak üzere ($r_1 A_1 + r_2 A_2 + r_3 A_3 + \dots + r_m A_m$) şeklinde en fazla bir değerdeki kayıpla kurtulacak en iyi strateji vardır.

A için

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_m &= 1 & r_i &\geq 0 \\ s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n &= 1 & s_j &\geq 0 \\ r_1 a_{1j} + r_2 a_{2j} + \dots + r_m a_{mj} &\geq E & j &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani A'nın ($r_1 A_1 + r_2 A_2 + \dots + r_m A_m$) karma stratejisi karşısında, B'nin daima j oyununu ($j = 1, 2, \dots, n$) uyguladığı varsayılmıştır.

		oyuncu (B)	
oyuncu (A)	A \ B	1	2
	1	-3	7
	2	6	1

Yukarıdaki oyun matrix'inden aşağıdaki eşitlikleri elde etmek mümkündür. $x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0$ olmak üzere

- (1) $x_1 + x_2 = 1$
- (2) $y_1 + y_2 = 1$
- (3) $-3x_1 + 6x_2 = E$
- (4) $7x_1 + x_2 = E$
- (5) $-3y_1 + 7y_2 = E$
- (6) $6y_1 + y_2 = E$

Birinci denklemi ele alalım; $x_2 = 1 - x_1$ dir.

İkinci denklemi ele alalım; $y_2 = 1 - y_1$ dir. (3) denklemde $x_2 = 1 - x_1$

yerine konulursa, $-3x_1 + 6(1-x_1) = E$ bulunur. x_2 nin ve y_2 nin yukarıdaki değerleri sıra ile denklemlerde yerine konulursa;

$$-3x_1 + 6(1-x_1) = E \quad 9x_1 + y = 6 \quad (7)$$

$$7x_1 + (1-x_1) = E \quad 6x_1 - E = -1 \quad (8)$$

$$-3y_1 + 7(1-y_1) = E \quad 10y_1 + E = 7 \quad (9)$$

(7) ve (8) denklemlerinden $9x_1 + E = -1$

$$6x_1 - E = -1 \text{ den } 15x_1 = 5 \dots\dots\dots x_1 = 1/3$$

$x_2 = 1 - x_1$ den $x_2 = 2/3$ bulunur. (7) ve (9) dan

$$E = 9 \left(\frac{1}{3}\right) + E = 6 \dots\dots E = 3$$

$$\text{İçin } y_1 + 3 = 7 \dots\dots\dots y_1 = 2/5$$

$y_2 = 1 - y_1$ den $y_2 = 3/5$ bulunur. Bu değerler (6) da yerine konulursa;

$$6(2/5) + 3/5 = 3 \text{ ve ilave olarak}$$

$$x_1 = 1/3 > 0, \quad x_2 = 2/3 > 0$$

$$y_1 = 2/5 > 0, \quad y_2 = 3/5 > 0$$

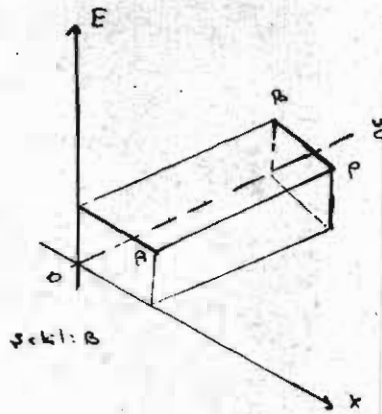
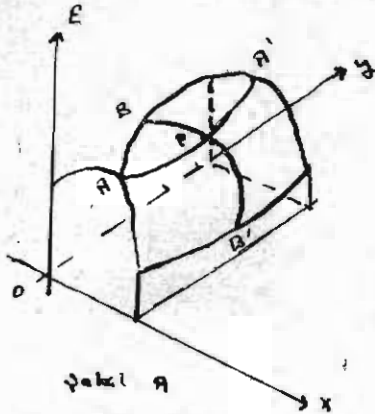
olduğundan oyunun tam çözümü olarak,

$$A (1/3\alpha + 2/3\beta) \rightarrow A (\alpha + 2\beta/3)$$

$$B (2/5\alpha' + 3/5\beta') \rightarrow B(2\alpha' + 3\beta'/5)$$

$$E_A = E_B = 3 \text{ bulunacaktır.}$$

MİN - MAX, DENGİ NOKTASI VE OYUNUN ÇÖZÜMÜ :



$$E = 1/2 - (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \quad E = 1 + 1/2x - 1/4y$$

Belli olan şartlar altında oyundan umulan $E(x, y)$ gibi iki değişkenli bir fonksiyonda A tarafından x ve B tarafından y seçilir. Şekil A da $E = E(x, y)$ fonksiyonu üçlü boyutlar halinde diyağramsal olarak gösterilmiştir.

Oyundan beklenen değişim varyansları şekil A da x ve y ayrı ayrı seçilmek üzere üçlü yüzeylere adapte edilmiştir. Karma strateji ile oynanan 2x2 ödemeler matrix'i simgeleri yüzeye uygulanmıştır. Bu nedenle $0 \leq x, y \leq 1$ için problemde verilen yüzey alanları şekil A ile tanımlanmaktadır. (24)

Her iki oyuncu tarafından oynanan dikdörtgen oyunlar (mxn) ödeme matrix'i şekilde uygulanabilir. Bu taktirde değişkenlerdeki herhangi bir değişme belli değer değişimleri olarak ele alınır. O halde $x = 1, 2, \dots, m$ ve $y = s = 1, 2, \dots, n$ belli değer değişimleri olarak kabul edilebilir. Şekil yüzeyi ayrıca bütün set değişimlerini de içerir.

Oyuncu A'nın amacı x i seçmektir. Oyuncu B'nin mümkün olan reaksiyon sayımları yükseltilebileceği en yüksek noktaya kadar (tepe) çıkar. Problemde B'nin amacı oyunda en yüksek düzeyi elde etmektir. (B bu amacını gerçekleştirmek için en yüksek düzeye sahip olmalıdır.) Eğer oyunda optimal olarak ortaya çıkabilecek bir çözüm varsa, x ve y'nin optimal seçim değerlerini almak gerekecektir. Buna en zor bakış min-max problemlerde olur. (25)

Oyunda maximizasyon noktası minimum değerler setidir. Minimizasyon noktası veya minimizasyon şekli ise, maximum değerler setidir.

Oyuncu A en kötü kararı seçerken oyuncu B, A'nın seçmiş olduğu herbir kötü karar için kendi seçimlerini en kârlı (maximum) kılabilir. Ve böylece yapılan en iyi (maximum) seçim mümkün olan dezavantajları da içermiş olacaktır. Şekil A'yı yeniden düşünelim. Esas olarak x ve y muhtelif değişimlere sahiptir. AA doğrusu ile BB' doğrusunun kesiştiği P noktası eyer noktasıdır. Ox doğrusu bu P noktasının altından aşağıya doğru Oy doğrusu ise, Ox doğrusunun üstünde yukarıya doğru hareket eder.

Basit olarak x ile y değişkenleri $E(x, y)$ i verir, $\max_x \min_y E(x, y)$ denge noktası olan P'nin üstünde bulunan AA' doğrusu üzerinde aranmalıdır.

Eğer (x, y) , (x^*, y^*) nin P noktasındaki değişim değerleri ise, o takdirde bu eger noktasını veren özellik :

$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*) \dots \dots \dots \text{dir.}$$

(24) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Mac millan and co LTD Newyork. St mortin's press. 1956 s. 502

(25) a.g.e. s. 503

$x \leq 0$ ve $y \leq 1$ için;

$$x^* = y^* = 1/2 \text{ dir (26)}$$

Min $E(x, y)$, BB' doğrusu üzerindedir. Yani en az bir ödeme ile A'nın x seçimlerinin en yüksek değerini veren min $E(x, y)$, BB' üzerindedir. A, x seçimlerinin max-min olarak $E(x, y)$ için BB' üzerinde bulunan A noktasında olmasını ister. B ise, BB' doğrusu üzerinde bulunan en yüksek değerden (ki P noktası) aşağıya inmeye çalışacaktır.

Oyuncu B tarafından bütün y ler seçilir. AA' eğrisi üzerinde B'nin rakibi olan A'nın ödemelerinin en yüksek olduğu noktanın altına düşülmelidir. B eğri üzerinde en düşük seviyeye sahip olduğu gibi y seçeneklerini min-max $E(x, y)$ olacak şekilde A'ya öder. Gerçekten P denge noktasına her bir oyuncu ulaşır. Bu nedenle de x^* ve y^* optimal ve dengeli seçimlerdir. (27)

Bu durumda A'nın arzu ettiği;

$E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$ eşitliğinin oluşmasıdır.

Gerçekten oyunun çözümünde bu eşitliğin oluşturulması önemli olduğu gibi bir bakıma zorunludur da. Şekilde bu zorunluluğun çözüm olarak gösterildiği P noktasında $E = E(x, y)$ bağlı olarak x^* ve y^* seçimleri temel olarak görülmektedir.

Bu noktada da basit olarak ifade edildiğinde $\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$ dengesi vardır denilir. A oyuncusu kendine açık olan x , stratejileri için den optimal x^* 'i seçer, B ise y^* seçeneklerinden y 'yi seçmeye çalışır. Tarafların birisi bu denge çiftinde sabit olarak kabul edilirse, Örneğin; A, B'nin davranışlarına aldırış etmeden x^* seçmişse, rakibinin davranışı ne olursa olsun oyundan $E(x^*, y^*)$ denge çiftini elde edeceğinden emin olacaktır. Her bir rakibin (taraf) sert ve kesin tutumlarla en fazla almaya yani kazançlarını maximum, kayıplarını minimum yapmaya çalışması doğaldır. Fakat seçimlerde bazı sınırlamaların olması tam anlamıyla tarafları hür kılmamıştır. Örneğin; oyuncu B, y ile y^* arasındaki seçeneklerin dışına çıkamaz, aksi halde oyun bozulduğu gibi çözümde bulunamaz. Rasyonel davranışlar kurallara uygundur. A, x^* 'i B de y^* 'yi oynuyorsa, her iki oyuncuda $E(x^*, y^*)$ de karar kılmalıdırlar. Hareket tarzı bu kurallara uyduğu zaman oyunda optimal çözüm elde edilmiş olacaktır. Şayet değişkenler arasında P denge

Bu noktada da basit olarak ifade edildiğinde $\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$ dengesi vardır denilir. A oyuncusu kendine açık olan x , stratejileri için den optimal x^* 'i seçer, B ise y^* seçeneklerinden y 'yi seçmeye çalışır. Tarafların birisi bu denge çiftinde sabit olarak kabul edilirse, Örneğin; A, B'nin davranışlarına aldırış etmeden x^* seçmişse, rakibinin davranışı ne olursa olsun oyundan $E(x^*, y^*)$ denge çiftini elde edeceğinden emin olacaktır. Her bir rakibin (taraf) sert ve kesin tutumlarla en fazla almaya yani kazançlarını maximum, kayıplarını minimum yapmaya çalışması doğaldır. Fakat seçimlerde bazı sınırlamaların olması tam anlamıyla tarafları hür kılmamıştır. Örneğin; oyuncu B, y ile y^* arasındaki seçeneklerin dışına çıkamaz, aksi halde oyun bozulduğu gibi çözümde bulunamaz. Rasyonel davranışlar kurallara uygundur. A, x^* 'i B de y^* 'yi oynuyorsa, her iki oyuncuda $E(x^*, y^*)$ de karar kılmalıdırlar. Hareket tarzı bu kurallara uyduğu zaman oyunda optimal çözüm elde edilmiş olacaktır. Şayet değişkenler arasında P denge

(26) Yukarıda adı geçen eser s. 503

(27) Yukarıda adı geçen eser s. 504

noktası yoksa oyunda optimal çözüm bulunamaz. Çünkü her bir oyuncu için uygun $\max\text{-min} = \min\text{-max}$ denge çifti yoktur. Bir taraf ala-

bildiğine kazancını maximum kılarken, diğer taraf devamlı kayıp durumundadır. Esas olan oyuncuların sınır seti içerisinde denge çiftinin optimal oluşunu sağlamalarıdır. Bu sağlanmadığı zaman her bir oyuncuya yönelik optimal strateji bulunamaz.

Şekilde, bölümler arasında (yüzey alanları) her bir oyuncu ile kendi kararları paralelinde anlaşma yapılacak bir nokta yoktur. Fakat bölüm alanları içerisinde bir nokta bulunabilir. Bu durum Şekil B de $E = E(x, y)$ olacak biçimde görülmektedir. x ve y nin uygun görülen değişimlerinin sınır aralığı ile denge noktası arasındaki düzeyde bölümlerle ilgili olarak bir köşe noktası vardır.

Ox, P noktasından direkt olarak aşağıya doğru (PB boyunca) ve Oy direkt olarak yukarıya doğru (PA boyunca) geçmesi hiç kabul edilmeyen bir harekettir. Eğer P (x, y) de değerler alabilecekse, bu şekildeki ifade altında formül;

$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*)$ şeklinde min-max ilişkilerin ifadesi olarak verilir ve bu tatmin edicidir de. (28)

Basit olarak değişme aralıklarındaki minima ve maxima kararlarının en yüksek ve en düşük değerlerine sınır setleri içerisinde yaklaşırlar. Özel ve birinci dereceden problemlerde (dikdörtgen oyunlarında) oyuncular saf stratejilerini oynadıkları gibi bu sınır setlerine bağlı olarak $A = a_{rs}$ ödeme matrix'i ile de hareket ederler. Oyuncu A'nın diğer taraftan $E(r, s) = [a_{rs}]$, ($r = 1, 2, \dots, m$ ve $s = 1, 2, \dots, n$) kadar beklediği varsa, E iki değişkenli olmak üzere r ve s her iki tarafın integral değerleri arasındadır.

(2x2) oyununda karma strateji için beklenenlerin $E(x, y)$ de tüm değerleri ayrı türden bir fonksiyon oluştururlar. Basit olarak 2x2 oyununda saf stratejiler oynandığı vakit $x = 0,1$ veya $y = 0,1$ olur. Bununla beraber boyutsuz oyunlarda saf stratejileri veren formül $\max\text{-min}(x^*, y^*) = E(x^*, y^*)$ dir. Bu gibi hallerde saf stratejiler arasında çözüm veya sabit sonuç vardır. Eğer matrix'te denge noktası varsa, ki bu denge noktası $\max_r \min_s E(r, s) = \min_s \max_r E(r, s) = E(r^*, s^*)$

şeklinde yazılabilir, Stratejiler bazen r ($r = 1, 2, \dots, m$) ve bazende s ($s = 1, 2, \dots, n$) aralığında değer alırlar. (29)

(28) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London, Mac millan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956, s. 504 - 505

(29) yukarıda adı geçen eser s. 505.

Herbir oyuncu saf stratejilerini oynarsalar oyunda optimal çözüm bulunabilir. Min-max prensip içerisinde oyuncular buna uymak zorundadırlar. En yüksek nokta A'nın kendi birimlerini verdiği gibi aranan denge noktası da onların arasındadır.

Şayet A sadece saf stratejisini oynayabilmek için oyunda var olan denge noktasını arzu ediyorsa diğer bir ifade ile denge noktasını destekliyorsa, problemde karma strateji yoktur. Bu gibi hallerde araştırma noktasının çözümü de birinci dereceden denklem çözümüyle olacaktır. Fakat genel olarak denge noktası ile karma strateji çözümünde birlikte aranır.

Bazı durumlarda bir oyunda denge noktası olmadığı gibi, saf stratejilerle de oynanmak istenebilir. Örneğin; ödeme matrix'i

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

A strateji 1 ile oyuna başlarsa B de A'ya 1 ödeme yapabilmesi için strateji 2'yi seçecektir. A kararında strateji 2'yi seçer ve oynamak isterse bu takdirde B'nin ödediği veya A'nın aldığı 3 tür. Bu işlem ters yönden işlediğinde netice değişmeyecek ve hiçbir anlaşma sağlanmadan oyun skloid çember etrafında dönecektir. 2x2 ödemeler matrix'i çözümü :

Oyunda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ödeme matrix'i vardır. Oyun karma strateji ile oynanır.

Oyuncu A, x'i oynamak için birinci stratejiye nazaran onun ikinci stratejisini oynar ve B, y'yi oynayacak biçimde ikinci stratejiye nazaran onun birinci stratejisini oynar. Oyundan beklenen değer eşitliği;

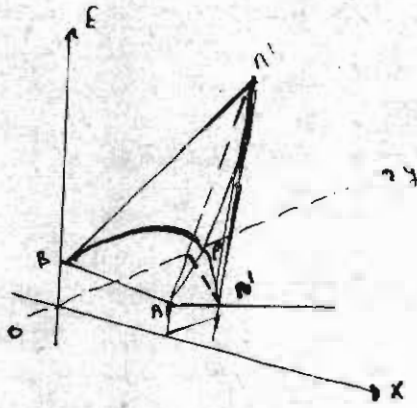
$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*)$$

Özel şekilde alınmış $E(x, y) = \min \max$ denge noktası olan bir oyunu düşünelim. Bu halde yukarıdaki ifade şu şekli alacaktır;

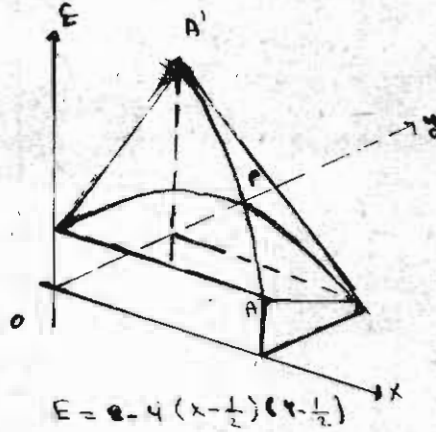
$$E(x, y) = a(x - \alpha)(y - \beta) + b \dots \dots \dots (30)$$

Bu halde daima bir denge noktası vardır. $x = \alpha$ ve $y = \beta$ gibi.

(30) D. Allen, R.G. London. Mathematical Economics. Macmillan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956 s. 507



Şekil A



Şekil B

x ve y de sınırlamalar vardır. $y, x \leq 1$ ve $0 \leq x$ ile $0 \leq y \leq 1$ uygunluk şartı vardır. Denge noktası çözümde bulunacaktır. Bölümler arasında denge noktasını bulmak mümkündür. Aksi halde yüzeyin bölümler arası tesirliliği denge noktasının dışında kalacaktır. Böylece çözüm olmadığı gibi arama metodu da reddedilecektir.

Bölüm boyutlarında (hudutlarında) olabilen yoğunlaşmaya dikkat edilmelidir ki, oyuncular saf stratejilerini oyuna adapte edebilsinler. (31) ($x = 0$ veya 1 ve $y = 0$ veya $y = 1$)

Şekil B de köşe noktaları ile sınırlanan alan yüzeyi, köşe noktaları etrafında parabolik olarak dönüştürülebilir. x ve y nin aralık limitleri uygun bir şekilde verilmeli, sınırlama demetinde $E(x, y) \geq 1$ olma olasılığı bulunmalıdır. Sınırlama probleminde geometrik yaklaşımla aritmetik kavramlar ve şartlar göz önünde tutulurken, matematiksel yaklaşımda oyunun optimal değerinin sıfırdan büyük veya pozitif olması sonucu aranmalıdır.

2x2 oyunlarında ilk önce oyundan beklenen için özel bir şekilde bilgiye ihtiyaç vardır.

Tanım : x^* ve y^* optimal değerleri herhangi bir x ve y için bulunabiliyorsa, yani $x^*, y^* \rightarrow x, y$ ise,

$0 \leq x, y \leq 1$ şartları altında

(31) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London. Mac millan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956 s. 507

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y) \text{ yazılabilir. (32)}$$

Denklemden denge noktası olduğu gibi, çözümde vardır. Denge noktası optimal strateji değerlerinin koordinat ekseninde geometrik değerleri ile belirlenir. (x^*, y^*)

Oyuncular optimal strateji yönüyle birbirlerine bağlıdır. Yani $A(x^*) \Leftrightarrow B(y^*) \Rightarrow E(x^*, y^*)$ dir.

Belli şartlar altında cebirsel terimlerle bir denge noktası için geometrik özellikler belirlenebilir. Bu yönüyle oyun teorisi yorumunun önemi daha da anlamlı olmaktadır.

Oyuncu A kendi stratejileri içerisinde optimal stratejisini x^* i seçerse, $E(x^*, y^*)$ değerleri kümesi içerisinde rakibi tarafından oynanan y değerlerinin en düşüğünü alır. Aksi halde oyuncu B, x değerlerinin en düşüğünü alır. Bu nedenle her iki oyuncu tarafından saf stratejilerin karşılıklı seçilmeleri gerekir.

$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*) \text{ bu denklemden}$$

$0 \leq x, y \leq 1$ aralığındaki mevcut min-max değerler verilmiştir.

$$\text{Şimdi } \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*) \text{ verildi-}$$

ğini varsayalım. x , E nin bir birim elemanıdır, ve E nin fonksiyonuna bağlı olarak $x = x^*$ deki maximum değeri, $E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y)$ dir.

Bu değer oyuncu B nin minimum değeridir. Yani $\min_y E(x^*, y)$ dir. Bu nedenle $E(x^*, y^*) = \min_y E(x^*, y) \leq E(x^*, y)$ yazılabilir. Bu denklemden herhangi bir y için y ($0 \leq y \leq 1$) ve x ($0 \leq x \leq 1$) değer aralıkları vardır.

x ($0 \leq x \leq 1$) için $E(x^*, y^*) = \max_x E(x, y^*) \geq E(x, y^*)$ yazılabilir. Böylece $\min_y \max_x E(x, y) \leq E(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y E(x, y)$ bağıntısı sonuç olarak ifade edilecektir. Bu sonuç denklemini maximize ve minimize (minimal) tariflerinden çıkarmak mümkündür.

$$\max_x E(x, y) \geq E(x, y) \geq \min_y E(x, y) \text{ burada } (0 \leq x, y \leq 1)$$

x in bir fonksiyonu olarak $\min_y E(x, y)$ yi maximum yapan x seçimini ve y nin bir fonksiyonu olarak $\max_x E(x, y)$ yi minimum yapan y seçimi :

(32) Yukarıda adı geçen eser s. 508

$$\min_y \max_x E(x, y) \geq \max_x \min_y E(x, y)$$

$$\min_y \max_x E(x, y) \leq E(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y E(x, y) \text{ ve}$$

$$\min_y \max_x E(x, y) \geq \max_x \min_y E(x, y) \text{ alınır}$$

$$\max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y) = E(x^*, y^*) \text{ ve}$$

Burada

$$(0 \leq x, y \leq 1) \text{ yazılabilir.}$$

2x2 ödeme matrix'ini içeren bir oyunda çözüm bulmak mümkündür. Oyunun değeri $E(x^*, y^*)$ dir ve $E(x^*, y^*) = \max_x \min_y E(x, y) = \min_y \max_x E(x, y)$ ve x^* ve y^* optimal stratejilerdir.

İlk önce $E(x, y)$ de $a \neq 0$ olduğunu varsayalım :

$$E(x, y) = a(x - \alpha) + (y - \beta) + b \text{ ve } \alpha \text{ ile } \beta, 1 \text{ den } 0 \text{ a değer alırlar.}$$

$E(\alpha, \beta) = E(x, y)$ bütün x ve y için $(0 \leq x, y \leq 1)$ dir. Tarifte $x = \alpha$ veya $y = \beta$ optimal stratejilerdir. Oyunun değeri $E(\alpha, \beta) = b$ dir. Bu durumda belirlenen denge noktası şekil C deki gibidir.

İkinci olarak, diğer bütün durumlarda herbir oyuncunun saf stratejisini göstermek zordur. Örneğin; $a > 0, \alpha, \beta > 1$ olduğunu varsayalım : Sonra

$$E(0, 1) = a\alpha(\beta - 1) + b$$

$$E(x, 1) = -a(x - \alpha)(\beta - 1) + b = a\alpha(\beta - 1) + b - a(\beta - 1)x \leq E(0, 1)$$

$$E(0, y) = a\alpha(\beta - y) + b = a\alpha(\beta - 1) + b + a\alpha(1 - y) \geq E(0, 1)$$

Herhangi bir x ve y $(0 \leq x, y \leq 1)$ dir Bu yüzden:

$$E(x, 1) \leq E(0, 1) \leq E(0, y) \text{ her hangi bir } x \text{ ve } y \text{ için } (0 \leq x, y \leq 1) \text{ dir.}$$

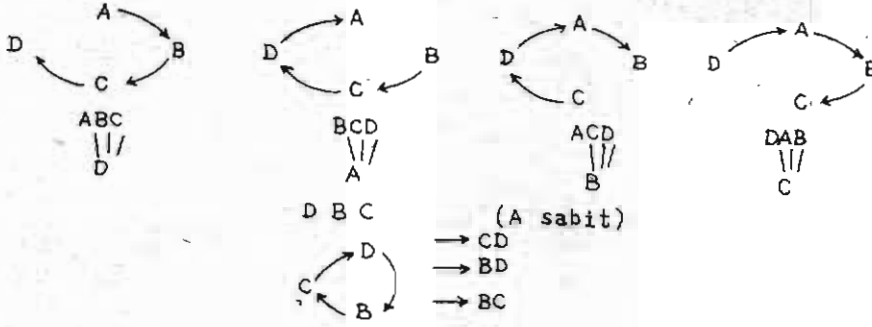
Tanımda, $x^* = 0, y^* = 1$ saf stratejilerdir. Bu örnekte A, B nin ikinci, B de A nin birinci stratejisini oynar. Diğer bütün α ve β için aynı türden çözümlerin doğuşunda α ve $\beta, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ aralığında-
dır ve bu durumlarda dahi $a = 0$ dir (33)

(33) D. Allen, R.G. Mathematical Economics, London. Macmillan and co LTD Newyork. St martin's Press. 1956 s. 510

2x2 matrix'li oyunlarda birden fazla çözüm bulunabilir. Fakat çözüm sayılarında sınırlılık vardır.

Sıfırtoptam ve (n) şahıslı oyunlar ve grafiksel çözüm :

n şahıslı oyunlarda koalisyon teşkil edilir. Oyuncuların böyle bir kararı olmasa dahi çözümün daha da kolay yönden elde edilebilmesi için bu şekilde varsayılması yerinde olacaktır. Oyunda A.B.C.D gibi 4 oyuncu varsa oyuncuların her biri dönüşüm olarak sabit tutulur. Oyun kombinasyonları aşağıdaki gibi düzenlenir.



Şimdi bütün bu bağımlılıkları bir tablo halinde gösterelim.

D \ A B C	I		II	
	A	B	A	B
1	ABC	D		
2	ABD	C		
3	ACD	B		
4	BCD	A		
5	A,B	CD		
6	A,C	BD		
7	A,D	BC		

Herbir oyun sırasının değeri vardır. Toplam oyun değeri farklı 7 koalisyonun toplam değeridir.

(n = 3) oyunculu-sıfır toplamli bir oyunda oyuncu davranışları;

A, B, C, ve ödemler matrix'i :

$\begin{matrix} \text{A} \\ \text{E}_1, \text{E}_2 \end{matrix}, \begin{matrix} \text{B} \\ \text{F}_1, \text{F}_2 \end{matrix}, \begin{matrix} \text{C} \\ \text{D}_1, \text{D}_2 \end{matrix}$

Ödemeler matrix'i

ABC			Ödemeler		
E_1	F_1	$D_1 D_2$	2	1	-3
E_1	F_1	$D_1 D_2$	-1	1	0
E_1	F_2	$D_1 D_2$	-1	-2	3
E_1	F_2	$D_1 D_2$	0	2	-2
E_2	F_1	$D_1 D_2$	3	-2	-1
E_2	F_1	$D_1 D_2$	-2	0	2
E_2	F_2	$D_1 D_2$	0	-1	1
E_2	F_2	$D_1 D_2$	-1	1	0

Kombinasyonlar : $A \rightarrow (BC)$
 $B \rightarrow (CA)$
 $C \rightarrow (AB)$

Bu üç ayrı oyunun ödemeler matrix'inin düzeninde yalnız bir tarafın kazançlarını gözönüne almak gerekir.

1 - $A \Leftrightarrow (BC)$ için

(B,C)				
E_1	2	-1	-1	0
E_2	3	-2	0	-1
	$F_1 D_1$	$F_1 D_2$	$F_2 D_1$	$F_2 D_2$

A [E_1], BC [$F_1 D_1$] $E = -1$ $E = +1$
[A] [A, C]

2 - $B \Leftrightarrow (A, C)$ için

(A, C)				
	$E_1 D_1$	$E_1 D_2$	$E_2 D_1$	$E_2 D_2$
F_1	1	1	-2	0
F_2	-2	2	-1	1

		(A, C)			
		$E_1 D_1$	$E_2 D_1$		
F_1	1	-2	x	1/4	B
F_2	-2	-1	1-x	3/4	
	y	1-y			

$$1 - 1/4 = 1 - x = 3/4$$

Burada n karma stratejileri bulmak mümkündür.

$$\left. \begin{array}{l} x-2(1-x) \geq E \rightarrow x-2+2x \\ -2x-1(1-x) \geq E \rightarrow -2x-1+x \end{array} \right\} x-2+2x = -2x-1+x = 1/4$$

$$y-2(1-y) \leq E$$

$$-2y-1(1-y) \leq E$$

B (1/4 F_1 , 3/4 F_2) elde edilir. Aynı yolla

AC [1/4 ($E_1 D_1$), 3/4 ($E_2 D_1$)] veya A (D_1), C [(1/4 E_1 , 3/4 E_2)] bulunur.

3 — C $\Leftrightarrow$ (A, B) için

		(A, B)				
		I	II	III	IV	I>IV
		$E_1 F_1$	$E_1 F_2$	$E_2 F_1$	$E_2 F_2$	III>I
	y		1-y	0	0	
D_1	x	-3	3	-1	1	1/4
D_2	1-x	0	-2	2	0	3/4
	3/4	1/4				

Denklemler :

$$\left. \begin{array}{l} -3x \geq E \\ 3x-2(1-x) \geq E \end{array} \right\} 1/4$$

$$\left. \begin{array}{l} -3y+3(1-y) \leq E \\ -2y \leq E \end{array} \right\} -3/4$$

Aynı yolla C (1/4 D_1 , 3/4 D_2)

A (P_1), B (3/4 F_1 , 5/8 F_2) bulunur.

Oyunların karakteristikleri

$$E(A) = -1.00$$

$$E(BC) = 1.00$$

$$E(B) = -1.25$$

$$E(AC) = 1.25$$

$$E(C) = -0.75$$

$$E(AB) = 0.75$$

2xn Ödemeler matrix'inde grafiksel çözüm :

2xn ödemeler matrix'i yerine 2x2 ödemeler matrix'i çözümü kolaylaştırmak için kullanılır. Bütün cebirsel terimler sınır aralığında kalmak şartıyla gözden geçirilmelidir.

Grafiksel çözüm daha çok eşitsizlik çözümlerinde kullanılır. Oyunda 2x2 ödemeler matrix'i ele alınmış ise, oyuncuların herhangi birisinin stratejileri düzlem analitik geometri metotları ile belirlenir. Örneğin; ödeme matrix'i

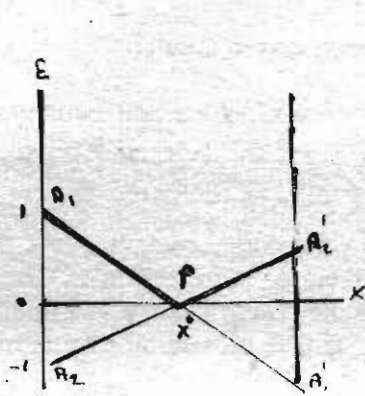
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

A, x ve (1 - x) sınırları içinde iki stratejiden fazla oynanamaz.

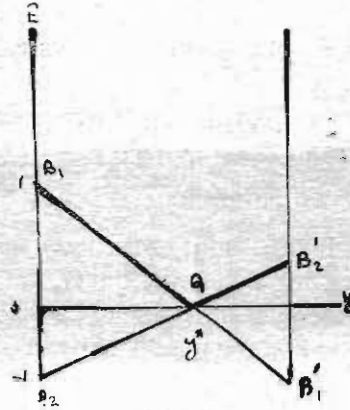
Eğer B, birinci stratejisini oynarsa (matrix'in birinci kolonundan) A'nın beklediği,

$$E = -x + (1 - x) = 1 - 2x \text{ olur.}$$

Eğer B ikinci stratejisini oynarsa, $x - (1 - x) = 2x - 1$ olur. Doğru üzerinde herbir eşit değerler işaretlenirse x'in aralıkları $0 \leq x \leq 1$ olmak kaydı ile bu işaretleme OxE eksen alanları içinde olur. (34)



Grafik 1



Grafik 2

Grafik 1'de : A_1, A_1' ve A_2, A_2' eşit simetri eksenlerinin denge noktasında (P) kesişirler. P noktasında $x = 1/2$ dir. E ise sıfırdır. A'nın

(34) D. Allen, R.G. Mathematical Economics, London, Mac millan and co LTD, Newyork St martin's press, 1956 s. 511-512

ortalama değerleri B nin karma stratejisinde aranacaktır. Oyunda $E = 0$ olması analitik olarak hesaplanabilir.

A_1 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (1, 0)

B_1 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (0, 1)

A_2 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (0, 1)

B_2 noktasının koordinat sisteminde apsis ve ordinatı (1, 0) dir.

Bir doğrunun iki uç noktaları biliniyorsa bu doğrunun x ve y cinsinden değerini bulmak mümkündür. Yukarıda A_1 , B_1 ve A_2 , B_2 doğrularının iki değişkenli denklemleri yazılır ve ortak çözülürse E nin değeri bulunur.

$E = E_1 \cap E_2$ dir.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x - x_1 / x_1 - x_2 &= y - y_1 / y_1 - y_2 \\ x - 1/1 - 0 &= y - 0/0 - 1 = -x - y + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x - x_1 / x_1 - x_2 &= y - y_1 / y_1 - y_2 \\ x - 0/0 - 1 &= (y - 1) / 1 - 0 = x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$E = E_1 \cap E_2 \rightarrow -x - y + 1 = x + y - 1 \rightarrow E = 0$ bulunur.

Grafikte A_2 PA_1 , doğrusunun en yüksek noktasında oyuncu A, x seçimini kullanır. Yani $x = 1/2$ ile $E = 0$ dir. Bu değerler P noktasının analitik değeridir.

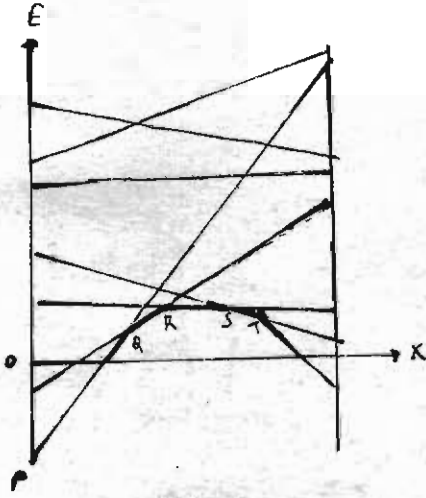
B_1QB_2 üçgen alanında doğrular y nin farklı seçimleri için B nin daha çok oynaması gerektiği yüzeyi biçimler. Grafik 2'de B_1QB_2 üçgeni içinde B oyuncusu seçeneklerini maximum kılan y yi arar. Yani maximum seçimlerle optimal $y = 1/2$ ile $E = 0$ değerlerini elde etmeye çalışır.

B_1QB_2 üçgen alanında doğrular y nin farklı seçimleri için B nin daha çok oynaması gerektiği yüzeyi biçimler. B_1QB_2 üçgeni içinde B oyuncusu seçeneklerini maximum kılan y yi arar. Yani maximum seçimlerle optimal $y = 1/2$ ile $E = 0$ değerlerini elde etmeye çalışır.

P noktası oyuncu A için P (1/2, 0)

Q noktası oyuncu B için $Q(1/2, 0)$ sayı kombinasyonunu oluştururlar. O halde optimal seçim için;

$x^* = y^* = 1/2$ ve oyunun değeri $E = 0$ yazılabilir.



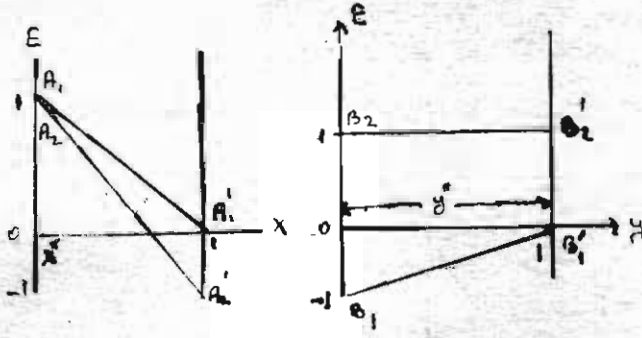
Grafik 3



Grafik 3 genellikle geliştirilmiş $2 \times n$ ödemeler matrix'i ile oyuna tatbik edilen grafiksel metodu içerir. n tane düz doğru vardır. Belirli artlar altında ki PQRS kırık çizgisi x ile A'nın beklediği minimum umutları içerir. Bu kırık doğru kesmesi $0x$ eksenini üzerindedir. En yüksek nokta veya noktalar kırık çizgi üzerinde x in optimal değerleri min-max prensip olmak kaydı ile açıklanır. Genel durumda horizontal doğru kesmesi, herbir aralıkta optimal x grafikte RS gibi y veya doğru kesişmelerinden oluşan setin tepesini açıklayan noktanın belirlediği tek optimal x i tarif eder. (35)

$m \times 2$ ödemeler matrix'ine aynı metodu uygulamak mümkündür. Grafikte belirtilmeye çalışılan oran $y : 1 - y$ dir. Ayrıca bu oran B oyuncusunun karma stratejisini gösterir. Oyunlarda $3 \times n$ veya $m \times 3$ ödemeler matrix'ini göstermekle problemlere üçboyut kazandırılmış olunur. Optimal karma stratejiler bu durumda, horizontal doğruların tepe noktaları tarafından verilir.

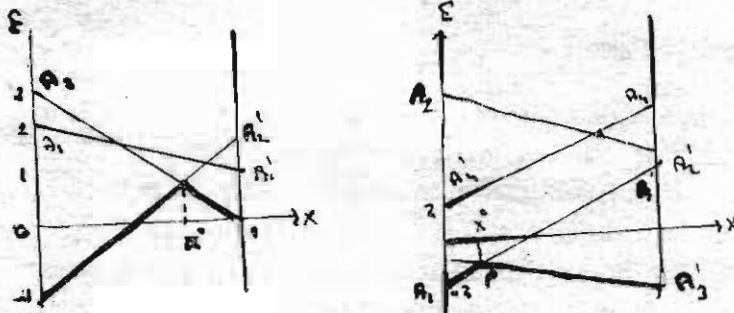
(35) D. Allen, R.G. London, Mathematical Economics. Macmillan And co LTD Newyork. St martin's Press. 1956 s. 515



Grafik 4

Grafiklerin matrix'i $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dir. $A_1A_1' \rightarrow E = 1 - x$
 $B_1B_1' \rightarrow E = y - 1$
 $A_2A_2' \rightarrow E = 1 - 2x$
 $B_2B_2' \rightarrow E = 1$

Matrix $3 \times n$ veya $m \times 3$ şeklinde ise, grafikler aşağıdaki gibi olacaktır.



Grafik 5

Ödeme matrix'i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

B nin stratejileri	doğru	umut edilen
1	A_1A_1'	$E = 2 - x$
3	A_2A_2'	$E = 3x - 1$
3	A_3A_3'	$E = 3(1 - x) = 3 - 3x$

A nin stratejileri	umut edilen
1	$E = x - 2$
2	$E = -3x + 1$
3	$E = -3(x - 1) = -3x + 3$

Şimdi tepe noktası bulunmayan bir ödemeler matrix'i ile (üç boyutlu) cebirsel olarak grafik metoduna dayalı örnek bir çözüm yapmaya çalışalım.

Ödemeler Matrix'i :

		B		
A \ B	B	y_1	y_2	y_3
	A/B	α'	β'	δ
x_1	α	3	1	3
x_2	β	-1	4	1

A oyuncusunun modeli :

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 1 & x_1 + x_2 &= 1 \\
 3x_1 - 1(x_2) &\geq E & 3x_1 - x_2 &\geq E \\
 1(x_1) + 4(x_2) &\geq E & x_1 + 4x_2 &\geq E \\
 3(x_1) + 1(x_2) &\geq E & 3x_1 + x_2 &\geq E
 \end{aligned}$$

B oyuncusunun modeli :

$$\begin{aligned}
 y_1 + y_2 + y_3 &= 1 & y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\
 3(y_1) + 1(y_2) + 3(y_3) &\leq E & 3y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq E \\
 -1(y_1) + 4(y_2) + 1(y_3) &\leq E & -y_1 + 4y_2 + y_3 &\leq E
 \end{aligned}$$

Şimdi iki stratejisi (α, β) olan A'nın kazanç denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 1 \\
 3x_1 - x_2 &\geq E \\
 x_1 + 4x_2 &\geq E \\
 3x_1 + x_2 &\geq E
 \end{aligned}$$

$x_1 + x_2 = 1$ den $x_2 = 1 - x_1$ bu değeri diğer üç denklemden yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
 3x_1 - (1 - x_1) &\geq E & 3x_1 - 1 + x_1 &\geq E & 4x_1 - 1 &\geq E \\
 x_1 + 4(1 - x_1) &\geq E & x_1 + 4 - 4x_1 &\geq E & -3x_1 + 4 &\geq E \\
 3x_1 + 1(1 - x_1) &\geq E & 3x_1 + 1 - x_1 &\geq E & 2x_1 + 1 &\geq E \quad \text{Buradan} \\
 4x_1 - E - 1 &\geq 0 \\
 -3x_1 - E + 4 &\geq 0 \\
 2x_1 - E + 1 &\geq 0 \text{ eşitlik haline getirirsek,} \\
 4x_1 - 1 &= E \\
 -3x_1 + 4 &= E
 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 1 = E$$

$4x_1 - 1 = E$ ve $-3x_1 + 4 = E$ doğrularının kesim noktası

$$4x_1 - 1 = -3x_1 + 4 \quad 4x_1 - 1 + 3x_1 - 4 = 0 \quad 7x_1 = 5 \quad x_1 = 5/7$$

$x_1 + x_2 = 1$ denkleminde $x_1 = 5/7$ değeri yerine konulursa

$x_2 + 5/7 = 1, x_2 = 2/7$ bulunur. Şimdi E yi bulmaya çalışalım.

$$E(A_B \rightarrow \alpha') = 3(5/7) - 1(2/7) = 13/7$$

$$E(A_B \rightarrow \beta') = 1(5/7) + 4(2/7) = 13/7$$

$E(A_B \rightarrow \delta) = 3(5/7) - 1(2/7) = 13/7$ bulunur. Diğer yönden,

$3x_1 + x_2 = 3(5/7) + 2/7 = 15/7$ bulunur. Bu ise $E = 13/7$ den daha büyüktür.

$3x_1 + x_2 > E$ ohalde $y_3 = 0$ olmalıdır.

$$y_1 + y_2 = 1 \quad \dots\dots\dots y_2 = 1 - y_1$$

$$\dots\dots\dots 3y_1 + 1(1 - y_1) = y_2 = 1 - y_1$$

değerini aşağıdaki denklemlerde yerine koyalım.

$$3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq E \quad \left. \begin{array}{l} y_3 = 0 \\ -y_1 + 4y_2 + y_3 \leq E \end{array} \right\} \quad y_2 = 1 - y_1$$

$$-y_1 + 4y_2 + y_3 \leq E \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y_1 + 1 \leq E \\ -5y_1 + 4 \leq E \end{array} \right.$$

$$3y_1 + 1 - y_1 + 0 \leq E \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y_1 + 1 \leq E \\ -5y_1 + 4 \leq E \end{array} \right. \Rightarrow 2y_1 + 1 = -5y_1 + 4 \quad \text{buradan}$$

$7y_1 = 3 \quad y_1 = 3/7$ bulunur. Bu değeri $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ denkleminde yerine koyarsak y_2 değerini bulmuş oluruz.

$$3/7 + y_2 + 0 = 1 \quad y_2 = 4/7 \text{ bulunur.}$$

$-y_1 + 4y_2 + y_3 \leq E$ denkleminde y_1, y_2, y_3 değerleri yerine konulursa E değeri bulunmuş olacaktır.

$$E = -3/7 + 4(4/7) + 0 = -3/7 + 16/7 = 13/7$$

Çözüm kombinasyonları;

$$A(5/7\alpha, 2/7\beta)$$

$B(3/7\alpha', 4/7\beta')$ ve oyunda tepe noktası yoktur.

Şimdi bu değerleri koordinat eksenlerinde bağlı bulundukları doğru denklemleri ile çizmeye çalışalım.

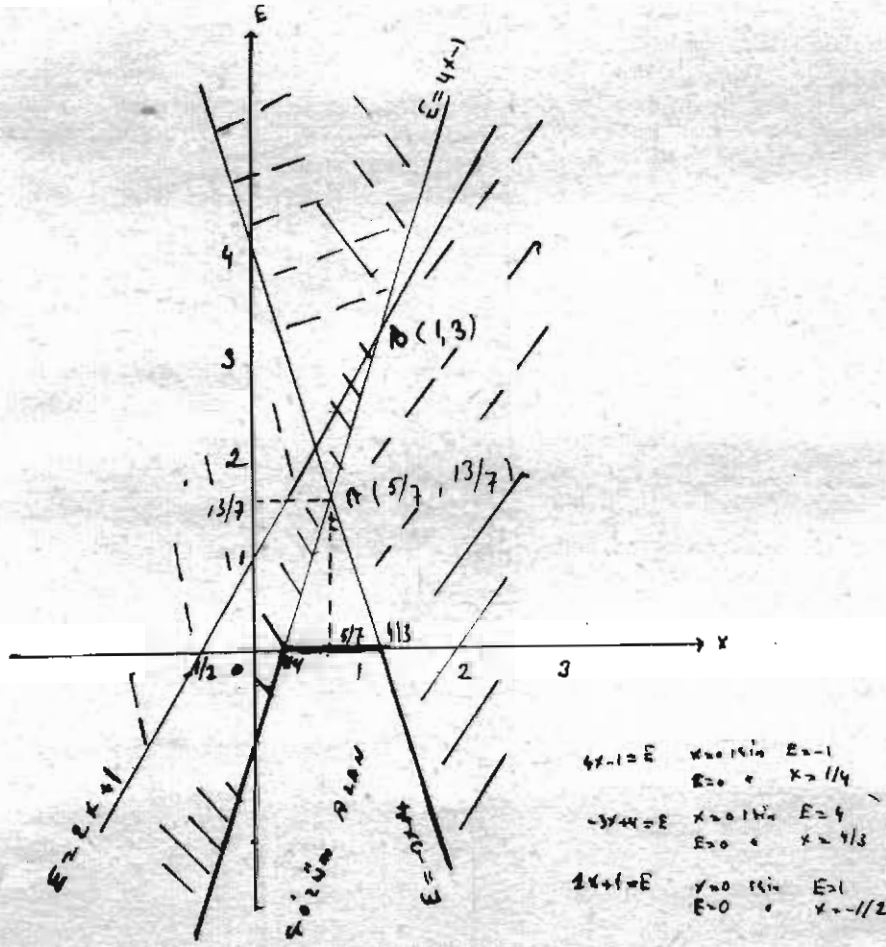
Çizim yapılırken doğru denklemlerinde bilinmiyen değişkenlerden herhangi birisi sabit bir sayı, örneğin sıfır olarak kabul edilip diğer değişkenlerin bu sabit değer karşılığı olarak aldığı değerler saptanacaktır. Doğru denklemlerinin bu şekilde yapılan çizimlerinden sonra kesim noktalarının apsis ve ordinat olarak değerleri bulunacaktır. Bunun için kesim noktasından geçen doğru denklemlerinin ortak çözümü yeterlidir.

Denklemler :

$$4x_1 - 1 = E$$

$$-3x_1 + 4 = E$$

$$2x_1 + 1 = E \text{ idi}$$



Grafik 6

Denklemler yardımı ile kesim noktalarının koordinatlarının bulunmasına çalışalım.

$$B \rightarrow E = 2x + 1$$

$$E = 4x - 1 \Rightarrow 2x + 1 = 4x - 1 \text{ den } x = 1$$

Bu değer $E = 2x + 1$ de yerine konulursa $E = 3$ bulunur.

$$A \rightarrow E = -3x + 4$$

$$E = 4x - 1 \Rightarrow -3x + 4 = 4x - 1 \text{ den } x = 5/7 \text{ bu değer}$$

$$E = -3x + 4 \text{ de yerine konulursa } E = 13/7 \text{ bulunur.}$$

İrdeleme :

A (1, 3)

B (5/7, 13/7)

Eğer bu noktalardan geçen doğru denklemi kurulursa ve kurulacak denklemin grafikte üzerinde bulunduğu doğru denklemine eşit olması saptanırsa çözüm doğrudur.

$x - x_1 / x_2 - x_3 = y - y_1 / y_2 - y_3$ (iki noktası belli olan doğru denklemini veren formül)

$$x - 1 / 7 - (-5/7) = y - 3 / 3 - (13/7) = x - 1 / 2:7 = y - 3/8:7$$

$$56x - 56 = 14y - 42$$

$$56x - 56 - 14y + 52 = 0 \text{ gerekli kısaltmalar yapılırsa, } 4x - y - 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

$Y = E$ ise (koordinat ekseninde) $4x - E - 1 = 0$ buradanda $4x - 1 = E$ bulunur.

Demekki çözüm doğrudur.

Tepe noktalı bir oyunun grafiksel çözümü :

		B	
		A/B	y_1 y_2
A	x_1	α	-2 -3
	x_2	β	-1 2
	x_3	δ	2 4

Denklemler :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq E$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq E$$

$$-2y_1 - 3y_2 \leq E$$

$$-y_1 + 2y_2 \leq E$$

$$2y_1 + 4y_2 \leq E \text{ yazılabilir.}$$

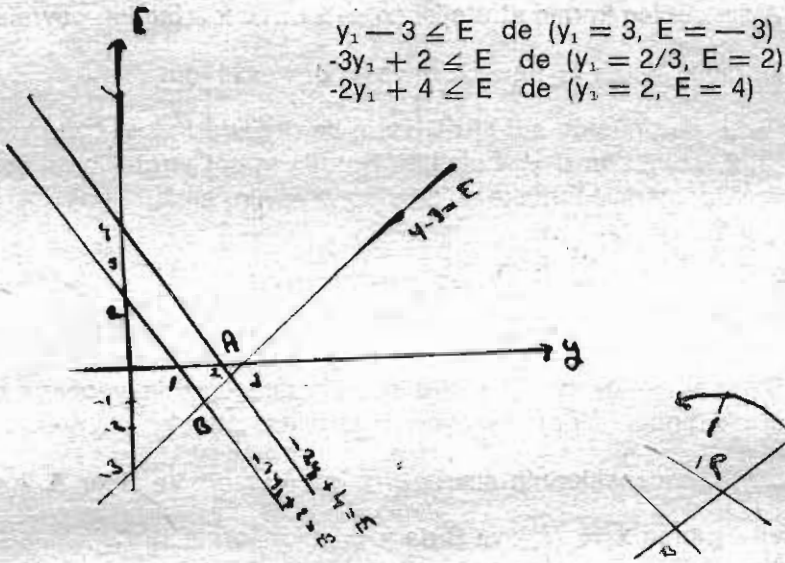
$y_1 + y_2 = 1$ $y_2 = 1 - y_1$ Bu değer aşağıdaki denklemlerde yerine konulursa,

$$-2y_1 - 3y_2 \leq E \quad -2y_1 - 3(1 - y_1) \leq E \quad y_1 - 3 \leq E$$

$$-y_1 + 2y_2 \leq E \quad -y_1 + 2(1 - y_1) \leq E \quad -3y_1 + 2 \leq E$$

$$2y_1 + 4y_2 \leq E \quad 2y_1 + 4(1 - y_1) \leq E \quad -2y_1 + 4 \leq E$$

$$y_1 - 3 \leq E \text{ de } (y_1 = 3, E = -3)$$



Grafik 7

Grafikte A ve B gibi iki tepe noktası ortaya çıkmaktadır. A'nın koordinatlarını bulalım.

$$y_1 - 3 = E$$

$$-2y_1 + 4 = E \quad y_1 - 3 = 2y_1 + 4 \quad y_1 = 7/3 = 2 \frac{1}{3} \text{ bu de\u011feri}$$

$y_1 - 3 = E$ de yerine koyarsak $E = -2/3$ bulunur. O halde

A $(2 \frac{1}{3}, -2/3)$ d\u00fcr

B'nin koordinatlarını bulalım.

$$y_1 - 3 = E$$

$$-3y_1 + 2 = E \quad y_1 - 3 = -3y_1 + 2 \quad y_1 = 5/4 = 1 \frac{1}{4} \text{ bu de\u011feri}$$

$y_1 - 3 = E$ de yerine koyarsak $1 \frac{1}{4} - 3 = E$, $E = 7/4$ o halde

B $(1 \frac{1}{4}, 1 \frac{3}{4})$ bulunur.

Genel durumlarda iki şahıs - sıfır toplam oyunu :

Genel olarak \u00f6demeler matrix'i $A = [a_{rs}]$ ($r = 1, 2, \dots, n$) ve ($S = 1, 2, \dots, m$) olabiliyordu. A oyuncusu m stratejileri ile faydalı saydığı di\u011fer karma stratejiler arasında se\u00e7im yaparak $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ oranlarını elde edebilir. Toplam oranlar x_m e giderken x_m in b\u00fct\u00fcn de\u011ferleri negatif olamaz ve x_m lerin de\u011ferleri pozitif olmalıdır. Daha da\u011frusu x_m de\u011ferleri $0 \leq x_m \leq \alpha$ arasındadır. Bazı \u00f6zel durumlarda $x = 0$ olabilir. Fakat oyuncu A tarafından arzu edilen $x = 1$ olmasıdır. Bu gibi hallerde oyuncular tarafından saf stratejiler oynanamayacaktır. Di\u011fer karar aralıklarında ise, karma strateji vardır.

ve A_3 saf stratejilerdir. Bu noktalar dışındaki alan noktaları karma stratejileri gösterir.

Tanım : x^*, y^* birer vektör iseler, x, X de y, Y de değer olarak aranır. Diğer bir ifade ile her bir değer bağlı bulunduğu değer değişkenlerinin de fonksiyonel olarak bulunmaya çalışılır. Oyunda herbir oyuncu için arzu edilen optimum stratejiyi gösteren bağıntı;

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y) \\ x' Ay^* \leq (x^*)' Ay^* \leq (x^*)', Ay \text{ idi.}$$

(x^*, y^*) , E nin denge noktasıdır. Oyunda matrix değer :

$$V = E(x^*, y^*) \text{ dir.}$$

A nın m stratejileri $x_1, x_2, \dots, x_m$ e kadar gidecektir. Karar verilirken düşünülen, oyuncu A, x değerlerini seçtiği zaman $E(x^*, y^*)$ değerini alarak bir bütün içinde rakibi B nin ne yaptığını bilmesidir. Bunun için oyunun bazı özelliklerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Özellik : I

$m \times n$ şeklinde bir ödemeler matrix'i problem olarak verilmiş olsun Oyuncu A oynadığı zaman saf stratejileri x^*, y^* olacaktır. Bu seçenek oyun matrix'inde optimal oyun için $cA + B$ dir. c Oyuncu A nın bütün positif değerlerini içerir. B ise $m \times n$ matrix'inde eşit bütün birimlerin $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ toplamıdır. O halde ikinci kez oyun oynanırsa oyunun değeri $(cv + b)$ olacaktır.

Özellik : II

Oyuncu B n stratejileri arasında seçim yapar ve bunlardan herhangi birini oynarsa $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sınır aralığı $\sum_{s=1}^n x_s = 1$,

Oyuncu A içi aynı durumda $\sum_{r=1}^m x_r = 1$ sınır aralığı olacaktır.

Herbir oyuncu saf stratejilerini oynayarak oyundan beklediklerini sınır aralığında biçimlendirebilirler de. Bu taktirde;

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} y_s^* \leq V \leq \sum_{r=1}^m a_{rs} x_r^* \text{ denklemini sağlanacaktır. Ayrıca,}$$

$$E(x^*, y) \geq V$$

$E(x, y^*) \geq V$ herbir oyuncu tarafından optimal strateji ile hareket edilen sınır aralığıdır.

Özellik : III

Oyunda her bir oyuncunun optimal stratejilerini sınırlayan v değeri varsa, optimal stratejiler x, y olmak üzere;

$$\sum_{s=1}^n a_{rs} y_s^* < V, \quad x_r^* = 0 \quad \text{ve}$$

$$\sum_{r=1}^m a_{rs} x_r^* > V, \quad y_s^* = 0$$

Bu şartları oyun matrix'ine uygulamak üzere;

$$a \rightarrow (x^*)' Ay \geq v, \quad x' Ay^* \leq v$$

$$b \rightarrow Ay^* \leq v \{1\} \leq A' x^* \quad \text{olarak yazabiliriz.}$$

$$Ay^* \leq v \{1\} \text{ de}$$

gerçek değer-artan değer = Bir elementin ifade edildiği x^* elementinin sıfır değeri. bağıntısı yazılabilir. Buda basit olarak

$$A'x^* \geq v \{1\} \text{ dir.}$$

Özelliklerin herbirinde oyunun çözümünde temel karar sayılabilecek doneler verilmiştir.

Birinci olarak x^* ve y^* optimal stratejiler olarak verilmişse, oyunda karar modeli şöyle belirlenir.

$$V = E(x^*, y^*) \leq E(x^*, y)$$

Eğer $E(x^*, y) \geq v$ verilmişse, $\bar{x}, \bar{y}$ optimal strateji olarak düşünölmek kaydı ile;

$$V = E(\bar{x}, \bar{y}) \leq E(x^*, y)$$

$$V = E(x, \bar{y}) \leq E(\bar{x}, \bar{y}) \text{ bu denklemde } y \text{ nin yerine } \bar{y} \text{ konulursa;}$$

$$E(\bar{x}, \bar{y}) \leq E(x^*, \bar{y})$$

$$V = E(\bar{x}, \bar{y}) \leq E(\bar{x}, \bar{y}) \text{ bu denklemde } x \text{ in yerine } \bar{x} \text{ konulursa;}$$

$$E(x^*, \bar{y}) \leq E(\bar{x}, \bar{y}) \text{ bulunur. Zira;}$$

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = E(x^*, \bar{y}) \text{ dir}$$

$$V = E(\bar{x}, \bar{y}) \leq E(x^*, \bar{y}) \text{ ve}$$

$$E = (x, \bar{y}) \leq E(x, y) = V \text{ ortak çözümlürse;}$$

$$E = (x, \bar{y}) \leq E(\bar{x}, \bar{y}) = V \text{ bulunur.}$$

$$E(x, \bar{y}) \leq E(\bar{x}, \bar{y}) = v$$

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = E(x^*, \bar{y}) \text{ birlikte verilirse;}$$

$E(\bar{x}, \bar{y}) \leq E(x^*, \bar{y}) \leq E(x^*, y)$ yazılır. E nin denge noktası karar modelinde $(x^*, \bar{y})$ dir, ve optimal strateji x^* dir.

Özellik IV :

Eğer oyunun ödemeler matrix'i kare ve ters simetrik ise, aynı strateji içerisinde herbir oyuncunun optimal stratejileri ve oyunun çözümü vardır.

Bir ters simetrik olan ödemeler matrix'indeki kasdedilen A ve B arasında benzeşim özelliği vardır. Eğer oyuncular değişir ve A'nın işareti (matrix) ters çevrilerek verilirse, B'nin ödemeside matrix'te -A' olarak verilir.

Örneğin; Finger - morra (Elsayma oyunu) oyununda ödemeler matrix'i ters simetriktir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Oyunda oyuncular arasında simetrik özelliği vardır. x^* ve y^* optimal stratejileri oyunda verilmiş olsun b Oyunun değeri de v ise;

$Ay^* \leq v \{1\} \leq A'x^*$ yazılabilir. Zira

$-(A)y^* \geq (-v) \{1\} \geq (-A')x^*$ dir, böylece

$A' = -A$ ve $-A' = A$ bulunacaktır. Bu ifadeden hareketle

$A'y^* \geq (-v) \{1\} \geq Ax^*$ yazılabilir.

$Ay^* \leq v \{1\} \leq A'x^*$ ve $A'y^* \geq (-v) \{1\} \geq Ax^*$ den

$A(x^* + y^*) \leq 0 \leq A'(x^* + y^*)$ yazılır. Böylece

$v \{1\} + (-v) \{1\} = 0$ olur. Şimdi x^* ve y^* aynı setlerin vektörleri olsun. Böylece A matrix'i kare şeklinde olacaktır. Vektör ise, $z^* = 1/2 (x^* + y^*)$ dir. Zira z^* herbir oyuncunun mümkün olan stratejisidir. Buradan hareketle;

$A(x^* + y^*) \leq 0 \leq A'(x^* + y^*)$ denklemi

$Az^* \leq 0 \leq A'z^*$ şeklini alacaktır. (37)

Sıfır toplamı olmayan oyunlar :

Sıfır toplamı olmayan oyunlarda oyuncuların birbirlerine yaptıkları ödemelerin toplamının sıfır olması şartı yoktur. Bu nedenle sıfır toplamı olmayan n şahıslı oyunları, $(n + 1)$ şahıslı sıfır toplamı oyunlar olarak düşünmek mümkündür. Böylece onun modelinin çözümü daha önce çözümü yapılan sıfır toplam şahıslı oyunlar gibi olmaya-

(37) D. Allen, R.G. Mathematical Economics. London, Mac millan and co LTD Newyork. St martin's press. 1956 s. 518 - 523

caktır. Çünkü oyunda $(n + 1)$. nci şahıs stratejiyi seçerken hür değildir.

Ödemeler matrix'inde hiçbir oyuncunun kazancı diğerinden aşağı düşmez. A'nın kazançları v ise, oyunun değeri de E ise, $v > E$ olmalıdır. Bu bizi oyunda impütasyon ve onun tariflerini yapmaya kadar götürecektir.

$(E_1, E_2, E_3, \dots, E_n)$ değerleri oyunda bulunan $1, 2, 3, \dots, n$ şahıslı oyuncuların eşdeğerleri olsun. $(n + 1)$. nci oyuncunun eşdeğerli oyun değeri E_{n+1} olacaktır. Daha önceki Açıklamalarda $A = -A$ ters simetriğinin olabileceğini göstermiştik. O halde burada da;

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değerleri serisini aşağıdaki şartlar altında bir impütasyon olarak tarif edebiliriz. (38)

$x_i, E_i, \dots, (i = 1, 2, \dots, n)$ değerleri için ve $\sum_{i=1}^n x_i = E$ dir.

Örnek : İki oyunculu bir oyun için, $E_1 = -1, E_2 = 0, E_{n+1} = E_3 = -3$ olsun.

Bu durumda $\sum E = (E_{n+1})$ tarifinden $E = 3$ dür. Aşağıdaki değer takımları impütasyonlardır.

$(2, 4), (-2, 8), (6, 2)$

	E_1	E_2	E_3
	-2	2	-6
i_1	2	4	-6
i_2	-2	8	-6
i_3	6	2	-6

Hiçbir değer oyun değerinin altında değildir.

$(8, -2) \dots \dots \dots -2 < E_2 = 0$

$(1, 1) \dots \dots \dots 1 + 1 = 2 < E = 3$ olduğu için impütasyon değildir.

n şahıslı sıfırdan farklı toplamlı oyunların çözümü :

Çözüm aynen yukarıda tatbik ettiğimiz metottan hareketle yapılacaktır. Yalnız sıfır toplamlı oyunlardan farklı olarak;

(38) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no : 730. Gümüşsuyu - İst. 1968 s. 151

Bu çözüm aşağıdaki şartları sağlayan impütasyonlar setidir. (39)

1 — Bu setteki hiçbir impütasyon diğerine baskın değildir.

2 — Bu set dışındaki herhangi bir impütasyon bu setteki impütasyonlardan biri tarafından bastırılır.

Örneğin;

			Ödemeler		
A	B	C	A	B	C
α	α'	α''	4	-2	-1
α	α'	α''	-2	2	2
α	α'	α''	2	0	3
α	α'	α''	-4	1	-1
β	β'	β''	2	0	-3
β	β'	β''	4	-2	1
β	β'	β''	1	0	-1
β	β'	β''	-2	1	0

A (α, β)

B (α', β')

C (α'', β'')

Yukarıdaki tablodan A, B, C nin ödemeler matrix'ini düzenlemek mümkündür.

Matrix : I

		(B,C)			
		$\alpha\alpha''$	$\alpha'\beta''$	$\alpha''\beta'$	$\beta'\beta''$
A	α	4	-2	2	-4
	β	2	4	1	-2

Matrix : II

		(A,C)			
		$\alpha\alpha''$	$\alpha\beta''$	$\beta\alpha''$	$\beta\beta''$
B	β'	-2	2	0	1
	β''	0	1	0	1

Matrix : III

		(A,B)			
		$\alpha\alpha'$	$\alpha\beta'$	$\beta\alpha'$	$\beta\beta'$
C	α''	-1	3	-3	-1
	β''	2	-1	1	0

Matrix I den çözüm denklemlerini yazalım;

$$\begin{array}{llll}
 4x + 2(1-x) \geq E & \text{ve} & 2x + 1(1-x) \geq E & \text{I} \\
 -2x + 4(1-x) \geq E & \text{ve} & -4x - 2(1-x) \geq E & \text{II} \\
 4y + 2(1-y) \leq E & \text{ve} & -4y - 2(1-y) \leq E & \text{III} \\
 -2y + 4(1-y) \leq E & \text{ve} & 2y + 1(1-y) \leq E & \text{IV}
 \end{array}$$

Matrix II den çözüm denklemleri;

$$\begin{array}{llll}
 -2x - 0(1-x) \geq E & \text{ve} & 2x + (1-x) \geq E & \text{I} \\
 0.x - 0(1-x) \geq E & \text{ve} & x + (1-x) \geq E & \text{II} \\
 -2y - 0(1-y) \leq E & \text{ve} & 2y + (1+y) \leq E & \text{III} \\
 0.y(1-x) \cdot 0 \leq E & \text{ve} & y + (1-y) \leq E & \text{IV}
 \end{array}$$

Matrix III den

$$\begin{array}{llll}
 -x + 2(1-x) \geq E & \text{ve} & -3x + (1-x) \geq E & \text{I} \\
 3x - 1(1-x) \geq E & \text{ve} & -x + 0(1-x) \geq E & \text{II} \\
 -y + 2(1-y) \leq E & \text{ve} & -3y + (1-y) \leq E & \text{III} \\
 3y - 1(1-y) \leq E & \text{ve} & -y + 0(1-y) \leq E & \text{IV}
 \end{array}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliklerin ortak çözümünden oyunun ve her bir stratejinin değerleri bulunarak kombinasyonlar teşkil edilir.

LINEAR PROGRAMLAMA VE OYUN TEORİSİ :

Doğrusal programlama ile iki veya daha çok çelişkilerin çözümüne gidilir. Oyundaki çelişkileri oyuncuların sayıları ortaya koyar. Oyuncuların herbiri sonlu veya sonsuz stratejileri ve bu stratejilere ait seçimlere sahiptirler. Bir oyuncu kendi stratejisini diğer oyuncularca seçilen stratejilerin herhangi birine özgü bilgiye sahip olmadan düşünür.

Bununla beraber bütün oyuncuların mevcut seçimleri oyunun ayrı ayrı sonuçlarını veya ödemelerini etkiler. Herbir oyuncu için bu sonuçlar bir hayli bir kazancı veya kaybı veya berabere kalmayı gösterir.

İki oyuncu ile oynanan oyunda, bir oyuncunun kazancının anlamları diğerinin eşit kaybını belirler. İki şahıs sıfır toplam oyunlarındaki gibi, bir oyuncunun ödemesini başka sözlerle ifade etmek yeterlidir. Varsayıldığı yönle stratejilerin numaraları her bir oyuncunun sonudur. İki oyuncunun strateji (seçim) numaraları matrix'te m ve n şeklinde (mxn) çıkışları olarak özetlenmeli. (40)

(40) Taha, A. Hamdy, Operations Research an Introduction. The macmillan Company. 866 third. Avenue, Newyork. 10022 Collier - macmillan. Canada LTD Toronto, Ontario. 1971 s. 171

İki şahıs sıfır toplamlı oyunlarda olduğu gibi her bir oyuncunun ödemeleri sonuç değeri olarak ifade edilir.

Oyunlarda çeşitli stratejilerle elde edilebilecek kazançların, el sayısına göre sabit kalması, Linear programlama tekniklerinin tatbiki-ni mümkün kılmaktadır. El tabiriyle oyunun tekrarlanma sayısı kasde-dilmektedir. (41)

İki oyuncu ile oynanan oyunda, bir oyuncunun kazançları diğer oyuncunun kayıplarıdır. (İki şahıs sıfır toplam oyunlarındaki gibi), Kavramları açıklayabilmek için sadece iki oyuncunun para atmasını düşünelim. Her bir oyuncunun seçimleri tura (t) veya yazı (y) dir. So-nuçta (tt, yy) kombinasyonu kurulacaktır. A'nın B'den kazandığı, B'nin kaybına eşittir. $E(A) + E(B) = 0$ dir. Fakat oyuncuların üstün olma durumları olabilir. Örneğin;

		B	
		t	y
A	t	+1	-1
	y	-1	+1

Her bir oyuncunun oyunda gerek duyduğu saf ve karma strateji-leri matrix'te göstermek mümkündür. Burada oyunu A, B oynama-dan oynarsa Oyuncu A saf stratejiye sahip olacaktır. Oyunlarda iki şa-hıs yerine n şahıslarda olabiliyordu. O halde denilebilirki oyun teorisi bu açıdan her bir oyuncunun linear programlama içerisinde optimal stratejilerinin matematiksel düzenlemeler setidir.

Problemin karmaşık yapısı ve her oyuncu tarafından seçilen belli stratejileri hakkında bilgi noksanlığı nedeniyle, burada model optimal kavram ve tutucu kriterlere dayandırılmıştır. Her bir oyuncunun kendi strateji seçimleri (karmaşık veya saf) diğer tarafın seçimleri ile belir-lenen ödemeler garantisinden kötü olamaz. (42)

(41) Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması. İ.T.Ü. yayınları yayın no : 730 Gümüşsuyu - İst. 1968 s. 129

(42) Taha, A. Hamdy. Operations Research an Introduction. The macmillan Com-pany. 866 third Avenue, Newyork 10022. Collier - macmillan. Canada. Toronto, On-tario. 1971 s. 172

Oyuncu A'nın seçimleri x_i ($x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m x_i = 1$) buradan,

$$\max_{x_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} x_i \right) \right\}$$

Oyuncu B'nin seçimleri y_j ($y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n y_j = 1$) buradan,

$$\min_{y_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \right) \right\}$$

yazılabilecektir.

Ortalama minimax ödeme $\geq$ maximin ortalama ödeme; değer eşitliğinde x_i optimal çözüme indirgendiğinde ortalama minimax değer = ortalama maximin değer eşitliği oluşacaktır.

x_i^* ve y_j^* iki oyuncunun optimal çözümleri ise, bu takdirde her ödeme a_{ij} (x_i, y_j) olasılığıyla bağlantılı olacaktır. Böylece oyundan beklenen değer v olarak alınırsa,

$$v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* x_i^* \text{ bağıntısı yazılabilecektir.}$$

$2 \times n$ ve $m \times 2$ oyunlarında verilen matrix'te bazen denge noktası olmayabilir. Örneğin;

		B			
		y_1	y_2		y_n
A	x_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
	$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}		a_{2n}

Teorik olarak bu matrix'te denge noktasının olmadığını varsayalım.

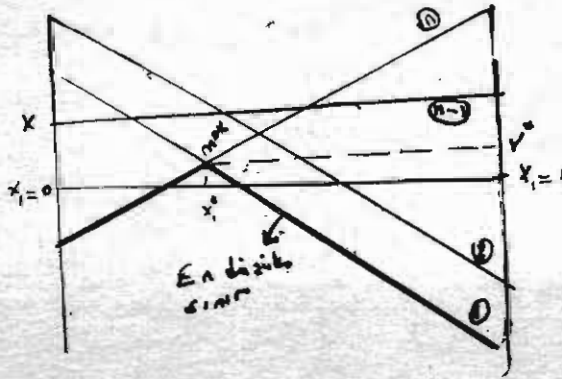
A iki stratejiye sahipken B'nin stratejileri n kadar olmaktadır.

Oyuncu B'nin oynaması halinde A'nın ortalama ödemeleri ne olacaktır? Bunu belirtmek için aşağıda gerekli formüller verilmiştir.

B nin saf stratejisi	A nin ortalama ödemeleri
1	$(a_{11} - a_{21}) x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22}) x_1 + a_{22}$
.	.
.	.
.	.
n	$(a_{1n} - a_{2n}) x_1 + a_{2n}$

A nin ortalama ödemelerinin yerini tutan saf stratejileri B nin seçimlerini vermektedir. x in herbir değeri A nin ortalama varyanslarını gösterir.

ortalama ödeme



Grafik 8

Her yol sayısı B nin saf stratejilerine denktir. En düşük sınırın yolları (çizgileri) x fonksiyonunun ortalama minimum ödemesini verir. Kalın çizgilerle çizilmiş doğru üzerindeki bütün noktalar B nin ödemeler matrix'inde kayda alınacak minimum kayıplarıdır. Maximum nokta iki doğrunun kesim noktası olan tepe noktasıdır. Dolayısı ile $x_1 (= x_1^*)$ dir.

2xn oyunları için ortalama değer;

$$v^* = y_1^* \{ (a_{11} - a_{21}) x_1^* + a_{21} \} + y_2^* \{ (a_{12} - a_{22}) x_1^* + a_{22} \} + \dots$$

+ $y_n^* \{ (a_{1n} - a_{2n}) x_1^* + a_{2n} \}$ formülü ile bulunur. Fakat maximum noktadan geçmeyen şekilde 2 ve $n-1$ doğrularının $\{ (a_{1j} - a_{2j}) x_1^* + a_{2j} \}$ değerleri doğruların $y_j = 0$ noktasında analizini gerektirir.

(x) Şekil, Taha, A. Hamdy, Operations research an intraduction. 177 den alınmıştır.

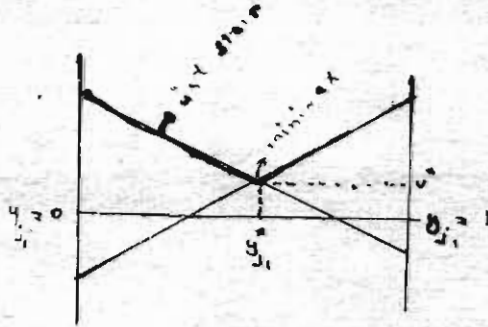
$y_j = 0$ oluncaya kadar doğrular yukarı veya aşağı kaydırılmalıdır. Bu sonuçtan şu gerçeği çıkarmak mümkündür. $\sum_j^m = 1$ olduğu için $y_j^* = 1$, $y_j^* > 0$ oyunun ortalama değeri (v^*) maximum ortalama ödemeye eşit olmayacak ve sonuç olarak minimax teorisi bozulacaktır. Zira maximum nokta iki düz doğrunun kesim noktasıdır. Bununla beraber maximum noktadan geçen ikiden fazla doğru olabilir. Bu takdirde y_j nin optimal değerlerinden bahsedilecektir. Demekki çözümlerin ağırlıksız ortalamasında dahi optimal çözüm geliştirilebilir.

Sonuç olarak $(2 \times n)$ oyunları temelde (2×2) oyun çözümlerine eşdeğer olacaktır. y_{j1} ve y_{j2} B nin kullanabildiği iki strateji ise $y_j = 0$, $y_{j2} = 1 - y_{j1}$, $y_{j1} \geq 0$ ve $y_{j2} \geq 0$ olduğu için B nin A nin stratejilerine eşdeğer ortalama ödemeleri şöyle olacaktır.

A nin saf stratejileri	B nin ortalama ödemeleri
1	$(a_{1j1} - a_{1j2}) y_{j1} + a_{1j2}$
2	$(a_{2j1} - a_{2j2}) y_{j1} + a_{2j2}$
.	.
.	.
.	.
n	$(a_{nj1} - a_{nj2}) y_{j1} + a_{nj2}$

Doğruların içerdiği ödeme denklemlerinin kesim noktası minimum nokta olan y_{j1} i gösterir.

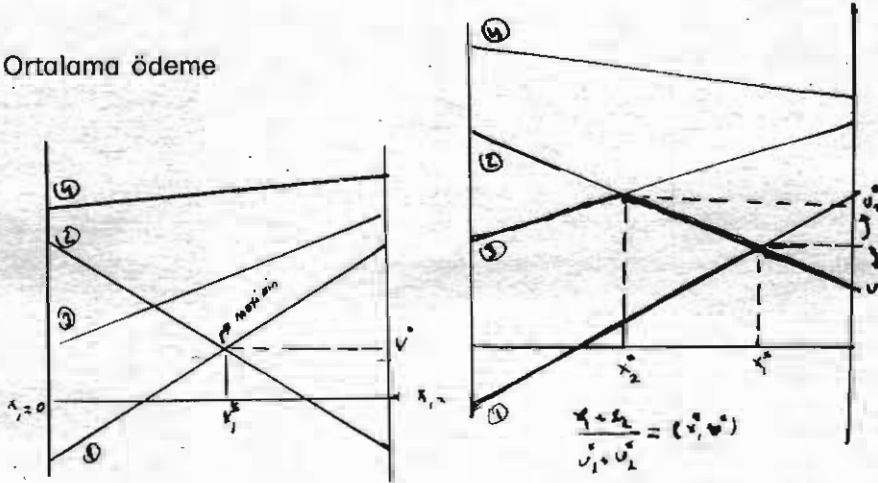
Ortalama ödeme



Grafik 9

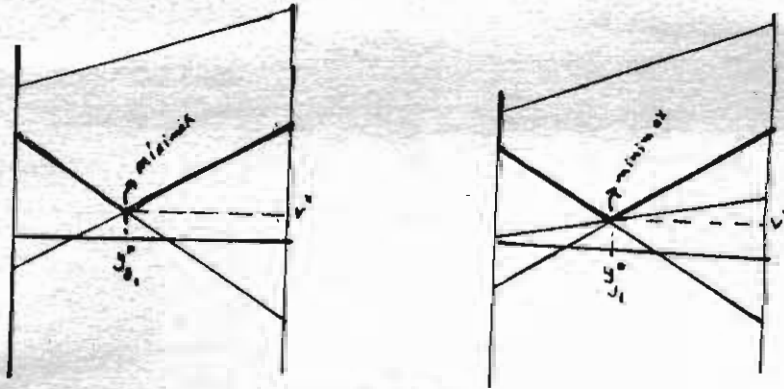
o halde $(2 \times n)$ oyununda maximin - minimax kriter grafiksel olarak aşağıdaki gibi olacaktır.

Ortalama ödeme



Grafik 10

Ortalama ödeme



Grafik 11

Şimdi aşağıdaki (2×4) oyununu düşünelim.

		B			
A	A \ B	y_1	y_2	y_3	y_4
	x_1	1	1	3	-2
	x_2	2	4	1	5

A'nın ortalama ödemelerine karşın B'nin saf stratejileri denklemsel olarak şöyledir.

B'nin saf stratejileri	A'nın ortalama ödemeleri
y_1	$(1-2)x + 2 = -x + 2$
y_2	$(1-4)x + 4 = -3x + 4$
y_3	$(3-1)x + 1 = 2x + 1$
y_4	$(-2-5)x + 5 = -7x + 5$

Denklemler :

$-x + 2$	I
$-3x + 4$	II
$2x + 1$	III
$-7x + 5$	IV

I ve II den $-x + 2 = -3x + 4$ den $x = 1$ bu değer II, III ve IV yerine konulursa

$$v^* = \left\{ \begin{array}{l} -3.1 + 4 = +1 \\ 2.1 + 1 = +3 \\ -7.1 + 5 = -2 \end{array} \right\} \text{ bulunur.}$$

O halde kombinasyonlar : (y_2, y_3) , (y_2, y_4) ve (y_3, y_4) dür.

Birinci Kombinasyonda $y_2 = 5$ $y_3 = 4$ dür, yani $y_2 > y_3$ dür.

İkinci Kombinasyonda $y_2 = 5$ $y_4 = 3$ dür, yani $y_2 > y_4$ dür.

Üçüncü Kombinasyonda $y_3 = 4$ $y_4 = 3$ dür, yani $y_3 > y_4$ dür.

O halde : $y_2 > y_3 > y_4$ dür.

Şimdide (4×2) oyununu düşünelim.

		B	
		x_1	x_2
A	y_1	1	2
	y_2	-2	3
	y_3	1	4
	y_4	-3	7

$y_2 = 1 - y_1$ verilmiş olsun

A'nın saf stratejileri

B'nin ortalama ödemeleri

y_1	$(1-2) y_1 + 2 = -y_1 + 2$
y_2	$(-2-3) y_1 + 3 = -5y_1 + 3$
y_3	$(1-4) y_1 + 4 = -3y_1 + 4$
y_4	$(-3-7) y_1 + 7 = -10y_1 + 7$
$-y_1 + 2 = -y_1 + 3$ den $y_1 = 1/4$	
$-5y_1 + 3$	$-5(1/4) + 3 = 1 \ 3/4$
$-3y_1 + 4$	$-3(1/4) + 4 = 3 \ 1/4$
$-10y_1 + 7$	$-10(1/4) + 7 = 4 \ 2/4$

$$v^* = \begin{cases} 1 \ 3/4 \\ 3 \ 1/4 \\ 4 \ 2/4 \end{cases}$$

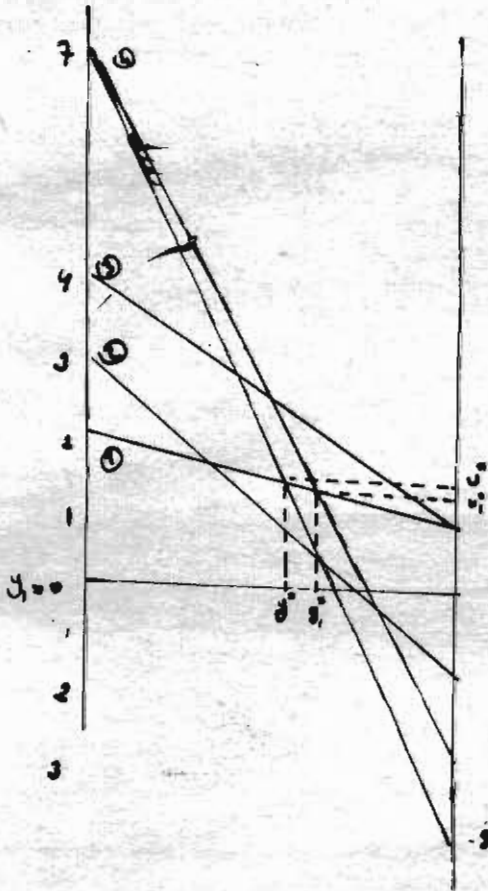
Kombinasyonlar $(y_2, y_3), (y_3, y_4), (y_2, y_4)$

$$(y_2, y_3) \rightarrow y_2 = 1, y_3 = 5, y_3 > y_2$$

$$(y_3, y_4) \rightarrow y_3 = 5, y_4 = 4, y_3 > y_4$$

$$(y_2, y_4) \rightarrow y_2 = 1, y_4 = 4, y_4 > y_2$$

O halde : $y_3 > y_4 > y_2$ dir.



Grafik 12

ÜSTÜNLÜK :

$(2 \times n)$ ve $(m \times 2)$ oyunlarının münakaşası yukarıda basitçe yapıldı. Oyundan her oyuncunun bir veya daha fazla saf stratejileri çıkarılırsa, çıkarılan stratejiler daha üstün olanlar tarafından domine edilirler. Aşağıdaki oyunda bu durumu düşünelim.

		B			A
		y_1	y_2	y_3	
A	B				
x_1	1	8	3		
x_2	6	4	5		
x_3	0	1	2		

Oyuncu B, A'nın üçüncü stratejisi için inputlarını hiç değilse birinci ve ikinci stratejilerin ikisi olmak üzere kazançlarıyla açıklar.

Bu durumda, üçüncü strateji matrix'ten çıkarılmış olmalı. Çünkü A birinci veya ikinci stratejisini daha iyi yapabilir. Dolayısı ile 3. ncü strateji birinci ve ikinci strateji tarafından üstün kılınır. Yukarıdaki matrix'i aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

		B			A
A \ B	B	y_1	y_2	y_3	
	x_1	1	8	3	
x_2	6	4	5		

Sadece saf stratejilerin bulunduğu durumlarda temel olarak üstünlüğe gerek yoktur. Örneğin;

		B			A
A \ B	B	y_1	y_2	y_3	
	x_1	5	0	2	
x_2	-1	8	6		
x_3	1	2	3		

Saf stratejilerin hiçbiri A'nın hiç değilse diğer saf stratejilerinden biri olarak verilmemiştir. Bununla beraber eşit ağırlıklar kullanıldığında, A'nın birinci ve ikinci saf stratejileri ortalama ağırlığı verir.

$\{ 1/2(5-1), 1/2(0+8), 1/2(2+6) \}$ veya

(2, 4, 4). Bu üstünlük A'nın üçüncü saf stratejisindedir. Bu durumda üçüncü strateji matrix'ten çıkarılmalıdır.

Yukarıdaki ifadeler ışığında doğrusal programlamadaki (mxn) oyunlarının çözümünü yapmaya çalışalım.

A'nın seçimlerini :

$$\max \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in}x_i \right)$$

Yukarıdaki formül sınır aralıkları olarak yazılırsa;

$$x_1 + x_2 = \dots = x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Bir doğrusal programlamada yukarıdaki ifadeler çekilip yerlerine konulursa;

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in}x_i \right)$$

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in}x_i \right) \text{ verilsin;}$$

Maximize $z_0 = V$ olduğunda, işleme temel olarak;

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \geq v$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i2}x_i \geq v$$

•

•

•

$$\sum_{i=1}^n a_{in}x_i \geq v$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (x_i \geq 0 \text{ bütün } i \text{ ler için,})$$

yazılır.

Açıkça bu durum v oyununun değerini tanımlar. Doğrusal programlama formülasyonu bütün $(n + 1)$ şartlarını v ile bölerek kısaltmak

suretiyle işler. Bu bölme neticesinde $v > 0$ dan büyük olduğu sürece optimalite sağlanır. Aksi taktirde eğer $v < 0$ ise, oyunun değeri optimal değildir. Optimal çözüm elde edildikten sonra oyunun gerçek değeri K çıkarıldıktan sonra elde edilir. Böylece $v > 0$ kabul edildiğinde yukarıdaki şartlar doğacaktır. (45)

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1/v + a_{21} x_2/v + \dots + a_{m1} x_m/v &\geq 1 \\
 a_{12} x_1/v + a_{22} x_2/v + \dots + a_{m2} x_m/v &\geq 1 \\
 &\vdots \\
 a_{1n} x_1/v + a_{2n} x_2/v + \dots + a_{mn} x_m/v &\geq 1 \\
 x_1/v + x_2/v + \dots + a_{mn} x_m/v &= -a_{mn} (x_m/v)^2 \\
 &= x_m/v = 1/v \\
 x_i &= x_i/v \quad (i = 1, 2, \dots, m \text{ verilsin}) \text{ Böylece,} \\
 \max v &= \min 1/v = \min \{x_1 + \dots + x_m\} \\
 x_0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_m
 \end{aligned}$$

matrix olarak,

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{m1} x_m &\geq 1 \\
 a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{m2} x_m &\geq 1 \\
 &\vdots \\
 a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots + a_{mn} x_m &\geq 1 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m &\geq 0
 \end{aligned}$$

Simplex metodu kullanmak suretiyle optimal çözüm sağlandıktan sonra, dönüşüm formüllerinden orijinal optimal değerler tayin edilebilir. Oyuncu B nin problemi diğer taraftan;

$$\min \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \right) \right\}$$

yan şartlara bağlı olarak;

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(45) Taha, A. Hamdy. Operations research an introduction, Macmillin company. New York 1968 s. 184

Bu doğrusal programlamada aşağıdaki gibi yerine konulursa;

maximize $y_0 = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ yan şartlarla

$$a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \dots + a_{1n} Y_n \leq 1 \quad Y_1 \geq 0$$

$$a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + \dots + a_{2n} Y_n \leq 1 \quad Y_2 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} Y_1 + a_{m2} Y_2 + \dots + a_{mn} Y_n \leq 1 \quad \text{ki,} \quad Y_n \geq 0$$

$$y_0 = 1/v \quad y_j = y_j/v \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Aşağıdaki (3x3) oyununu düşünelim.

		B			
Kolon maximum	A \ B	y_1	y_2	y_3	sıra minimum
	x_1	3	-1	-3	-3
	x_2	-3	3	-1	-3
	x_3	-4	-3	3	-4
		3	3	3	

A

maximum değer -3 dür. Oyunun değerinin negatif veya sıfır olması mümkündür.

		B			
Kolon maximum	A \ B	y_1	y_2	y_3	sıra minimum
	x_1	8	4	2	
	x_2	2	8	4	
	x_3	1	2	8	
					k = 5

A

Böylece sabit bir k enazından negatif maximum değere eşit olan matrix'in bütün unsurlarına ilave edilir. Bu demektirki $k \geq 3$ dür. $k = 2$ ise, yukarıdaki matrix'i şu hale gelir.

		B			
Kolon maximum	A \ B	y_1	y_2	y_3	sıra minimum
	x_1	5	1	-1	
	x_2	-1	5	-1	
	x_3	-2	-1	5	

A

Yukarıdaki mantık çerçevesi içerisinde B nin doğrusal programlamadaki fonksiyonel değerleri,

maximize $y_0 = y_1 + y_2 + y_3$
yan şartlara bağlı olarak,
 $8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1$
 $2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \leq 1$
 $y_1 + 2y_2 + 8y_3 \leq 1$
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

8	4	2
2	8	4
1	2	8

Bu problem için verilen son optimal tablo aşağıdaki gibidir:

temel	y_0	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	çözüm
y_0	1	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196
y_1	0	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14
y_2	0	0	1	0	-3/98	3/196	-1/14	11/196
y_3	0	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49

Böylece orijinal problem için

$$v^* = 1/y_0 \cdot k = 196/45 \cdot 5 = -29/45$$

$$y_1^* = y_1/y_0 = 1/14 : 45/196 = 14/45$$

$$y_2^* = y_2/y_0 = 11/196 : 45/196 = 11/45$$

$$y_3^* = y_3/y_0 = 5/49 : 45/196 = 20/45$$

A için optimal stratejileri yukarıda ikili çözümlerle bulunur. Bunu veren değerler :

$$x_0 = y_0 = 45/196 \quad x_1 = 5/49, \quad x_2 = 11/196, \quad x_3 = 1/14 \text{ zira,}$$

$$x_1 = x_1/x_0 = 20/45$$

$$x_2 = x_2/x_0 = 11/45$$

$$x_3 = x_3/x_0 = 14/45 \text{ yazılabilir.}$$

Örnek :

Ödemeler matrix'i;

		B	
		I	II
A	I	2	5
	II	3	1
	III	0	3

A

olsun.

Ödemeler tablosunda tepe noktası yoktur. Yani minimum sıra =

maximum kolon, eşitliğini sağlayan sıranın en küçük değerine karşın sütunun enbüyük kare değeri işaret edilmemiştir.

O halde karma strateji vardır. A'nın oyunları x_1, x_2, x_3 olsun. Şimdi oyuncu A'nın en iyi karma stratejisini tayin edelim.

Modelin kurulması :

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \text{ ve} \\ \text{II} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}$$

B'nin farklı iki stratejisine paralel olarak A'nın umut edilen kazançları;

$$2x_1 + 3x_2 + 0.x_3$$

$$5x_1 + 1.x_2 + 3x_3 \text{ şeklini alacaktır.}$$

Bu iki kazançtan küçük olanını veya ikisinin de eşit olanını alarak ortak değeri (E) ile gösterelim. Yukarıdaki denklemler :

$$2x_1 + 3x_2 \geq E$$

$5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq E$ şeklinde yazılacaktır. $E \geq 0$ dır. Çünkü bütün kare değerleri $x_{ij} \geq 0$ dır. Fakat matrix'te negatif değerler varsa, yukarıdaki teorik ifade altında kare değerlerini positif kılmak için x_{ij} değerlerine sabit k sayısı ilave etmek gerekecektir.

$$x_1/E \geq 0, \quad x_2/E \geq 0, \quad x_3/E \geq 0 \dots\dots\dots \text{I}$$

$$x_1/E + x_2/E + x_3/E = 1/E \dots\dots\dots \text{II}$$

$$2(x_1/E) + 3(x_2/E) + 0(x_3/E) \geq 1 \dots\dots\dots \text{III}$$

Oyuncu A (x_1, x_2, x_3) karma stratejisini E yi maximum kılacak şekilde seçecektir.

$x_1/E + x_2/E + x_3/E = 1/E$ eşitliğinde $1/E$ yi maximum kılmak mümkündür.

$1/E$ yerine E' dersek,

$$x_1/E = 0 \text{ yerine } x_1/E = x$$

$$x_2/E = 0 \text{ yerine } x_2/E = y$$

$x_3/E = 0$ yerine $x_3/E = z$ yazalım. Bu halde A'nın eşitlik halinde değeri;

$$\min E' = x + y + z$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

$$2x + 3y + 0.z \geq 1$$

$$5x + 1y + 3z \geq 1$$

Bu model belirlendikten sonra simplex metoduyla çözüm tekniğini yürütmek kolaydır. Şimdi B'nin problemini gözönüne alarak modeli kurmaya çalışalım.

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

A'nın x_1, x_2, x_3 stratejilerini tek tek oynadığını varsayarak her Ax stratejisine karşın B'nin karma stratejileriyle yapacağı ödemeler;

$$2y_1 + 5y_2$$

$$3y_1 + 1y_2$$

$$0.y_1 + 3y_2 \text{ şeklini alır.}$$

Bunların en büyüğünü veya hepsinin eşit olması halinde, bu ortak değeri E'' ile gösterelim. B'nin gayesi ödemelerini minimum yapmak ve bu özel durumda ise, E'' den daha küçük yapmak olacaktır.

$$2y_1 + 5y_2 \leq E''$$

$$3y_1 + y_2 \leq E''$$

$$0.1y_1 + 3y_2 \leq E'' \text{ yeni hali ile model,}$$

$$y_1/E'' \geq 0, y_2/E'' \geq 0$$

$$y_1/E'' + y_2/E'' = 1/E''$$

$$2(y_1/E'') + 5(y_2/E'') \leq 1$$

$$3(y_1/E'') + (y_2/E'') \leq 1$$

$$0(y_1/E'') + 3(y_2/E'') \leq 1$$

$$y_1/E'' = u \quad y_2/E'' = v \quad 1/E'' = E''_1 \quad u \geq 0 \quad v \geq 0 \text{ olsun.}$$

$$2u + 5v \leq 1$$

$$3u + 1v \leq 1$$

$$0.u + 3v \leq 1$$

$$\text{maximum } E''_1 = u + v$$

O halde bu modelde simplex tekniğiyle çözülebilir. Simplex tekniğinin temel esaslarından biri olarak eşitsizlikleri eşitlik haline getirmek için α, β, σ gibi üç izafi değişken ilave etmek gerekir. O halde;

$$u \geq 0, v \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \sigma \geq 0 \text{ dir.}$$

$$2u + 5v + \alpha = 1$$

$$3u + 1v + \beta = 1$$

$$0.u + 3v + \sigma = 1$$

$$-u + v + m = 0$$

Amaç : maximum m, dir.

Yukarıdaki denklem değerlerini tablo halinde gösterelim.

0	0	0	1	1	
α	β	σ	u	v	pr
1	0	0	2	5	1
0	1	0	3	1	1
0	0	1	0	3	1

Tb. I

$$\begin{array}{r} 2.0 \\ 3.0 \\ 0.0 \\ \hline 1 - 0 = 1 \end{array}$$

u ve v nin birer üniteleri (1) lik bir kâr sağlamaktadır.

Örneğin; (4) stratejiye dahil edilsin. Şimdi ne kadar (4) kullanabileceğimizi tesbit edelim.

α ya göre 1/2
 β ya göre 1/3
 σ ya göre tahdit yok,

O halde 1/3 ü kullanırız. Bu halde yani tablo için gerekli hesaplamalar,

α nın : $1/3 \cdot 2 = 2/3$ geriye 1/3 ü kalır.

β nın : $1/3 \cdot 3 = 1$ tamamı alınır ve kullanılır. σ dan hiç alınmaz.

Yeni tablodaki dönüşüm katsayılarını bulursak,

birinci tablodan

$$\begin{aligned} u &= 2\alpha + 3\beta + 0 \dots\dots\dots \beta = -1/3 u - 2/3\alpha \\ v &= 5\alpha + 1\beta + 3\sigma \dots\dots\dots v = 13/3\alpha + 1/3 u + 3\sigma \\ \text{ve v nin ilgili katsayılarını aşağıdaki tabloya koyarsak;} \end{aligned}$$

	0	0	0	1	1	pr
	α	β	σ	u	v	pr
0. α	1	2/3	0	0	13/3	1/3
1. β	0	1/3	0	1	1/3	1/3
0. σ	0	0	1	0	3	1

$$\begin{array}{r} -(13/3) \cdot 0 \\ -(1/3) \cdot 1 \\ -(3) \cdot 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 - \frac{1}{3} = 2/3 \text{ kâr} \\ 3 \end{array}$$

Yeni tablonun tahlili ve alternatiflerin aranması :

Yukarıdaki tablo ışığı altında hesaplamaları yapalım;

v yi stratejiye ithal etmek karlı olmaktadır. Şimdi ne kadar v ithal edebileceğimizi araştıralım.

$$\alpha \text{ nın verdiği olanak} \quad 1/3 : 13/3 = 1/13$$

$$\beta \text{ nın verdiği olanak} \quad 1/3 : 1/3 = 1$$

$$\sigma \text{ nın verdiği olanak} \quad 1 : 3 = 1/3$$

O halde $1/3$ v ithal edebiliriz. Şimdi yeni tabloyu tanzim edelim.

$$v \rightarrow 1/3 \text{ ithali halinde } 1/3 \cdot 13/3 = 1/3 \alpha \text{ nın hepsi çıkar,}$$

$$u \rightarrow 1/3 - 1/13 \cdot 1/3 = 12/39 = 4/13 \text{ u kalır,}$$

$$1 - 1/13 \cdot 3 = 10/13$$

Yeni katsayılar,

$$\text{yine; } u = 2\alpha + 3\beta + 0.\sigma \text{ ve}$$

$$v = 5\alpha + 1\beta + 3\sigma \text{ den}$$

$$= -1/13 u + 3/13 v + 9/13\sigma \text{ ve}$$

$$= 15/13 u - 2/13 v + 6/13\sigma \text{ bulunur.}$$

Yukarıdaki ifadeleri içeren tablo :

	α	β	σ	u	v	pr
v	3/13	-2/13	0	0	1	1/13
u	-1/13	5/13	0	1	0	4/13
σ	9/13	6/13	1	0	0	10/13

karlılık analizi :

$$\alpha : (3/13 \cdot 1) - (1 \cdot 1/13) = 1/13 \text{ zarar } 0-2/13$$

$$\beta : (2/13 \cdot 1) + (1 \cdot 5/13) = 3/13 \text{ zarar } 0-4/13$$

O halde $v = 1/13$, $u = 4/13$, $\sigma = 10/13$

Optimal stratejiyi tesbit edelim. Bu durumda,

$$\max E'' = 1/13 \cdot 1 + 4/13 \cdot 1 = 5/13$$

Değişken değiştirme hesaba katılırsa;

$$1/E' = E'' \dots\dots\dots E' = 1 : 5/13 = 13/5$$

$$y_1/E' = u \dots\dots\dots y_1 = 4/13 \cdot 13/5 = 4/5$$

$$y_2/E' = v \dots\dots\dots y_2 = 1/13 \cdot 13/5 = 1/5$$

değerleri elde edilir. Sınır aralıkları ve model denklemleri;

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

$$2x + 3y + 0.z \geq 1$$

$$5x + 1y + 3z \geq 1$$

$$\text{model } x + y + z = \min E \quad \text{idi.}$$

$E = -\bar{E}$ değişken değişimini yapalım. Böylece E yi minimum yapmaya ve $\bar{E}$ yi de maximum yapmaya çalışacağız.

$E = -\bar{E}$ nin probleme tatbiki simplex metotda daha kolaydır. σ ve w gibi iki izafi değişkenle de eşitsizlikleri eşitlik haline getirebiliriz.

$$2x + 3y + 0.z - \sigma = 1$$

$$5x + 1y + 3.z - w = 1$$

$$E = x + y + z - 0.\sigma - 0.w \dots\dots\dots \bar{E} = -E = 5/13$$

Neticede;

$x = 13, y = 3/13, z = 0$ bütün bu değerler yukarıdaki denklemlerde yerine konulursa,

$$E = 13/5, x_1 = 2/5, x_2 = 3/5, x_3 = 0 \text{ bulunur.}$$

Düalte prensibinin tatbiki ile çözümün bulunması :

	α	β	pr
u	-1/13	5/13	4/13
v	3/13	-2/13	1/13
σ	-9/13	6/13	10/13
E	2/13	3/13	5/13

Bu matrix'in sıralarını sütun, sütunlarını sıra halinde yazmak sureti ile transpoze edelim.

$$- \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1/13 & 3/13 & -9/13 & 2/13 & x \\ \hline 5/13 & -2/13 & 6/13 & 3/13 & y \\ \hline 4/13 & 1/13 & 10/13 & 5/13 & E \\ \hline \end{array} \right.$$

Bu matrix'in invers matrix'i bütün tablo değerlerinin işaretlerinin değiştirilmesi sonucu elde edilmiştir.

Dominance (Üstünlük) :

Örnek : I

B \ A	I	II	III	IV	V	
I	9	3	1	8	0	0
II	6	5	4	6	7	7
III	2	4	3	3	8	
IV	5	6	2	2	1	
		2		1		
	9		4		8	

A ya maximumcu denir.

B ye minimumcu denir .

Matrix'in önce dominans kriteri ile basitleştirilir, sonra sıranın en küçüğü ve sütunun en büyüğü alınarak çözüm sağlanır. Ne varki yukarıda verilen örnek dominans yoluyla çözülememektedir. Çünkü;

B III IV olduğundan IV ü oynamaz,

B III IV olduğundan II yi oynamaz

A II IV olduğundan IV ü oynamaz.

Örnek : II

	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	9 (4)	6 (5)	1 (3)	3 (6)	-2	0	2 (2)
II	11	7	2	4	0	3	4
III	13	4	8	14	6	2	3
IV	11 (1)	3	6	10	5	1	1

A II yi IV e tercih eder ve IV ü oynamaz

B IV ü VII e tercih eder ve VII i oynamaz

III, IV den dha kötü olduğu için II yi oynamaz

II, I den daha iyi olduğu için I i oynamaz

II ve IV de V ve VI den daha kötü oldukları için oynamaz.

O halde A ise bu durumda I i oynamaz.

Dominans durumları yazılarak tablo düzenlenirse;

$$S_{II} > S_I$$

$$S_{IV} > S_{VI}$$

$$S_{ü5} > S_{ü4}$$

$$S_{ü5} > S_{ü3}$$

$$S_{ü5} > S_{ü1}$$

$$S_{ü6} > S_{ü3}$$

$$S_{ü6} > S_{ü2}$$

S_{II} , S_{III} ve $S_{ü5}$, $S_{ü6}$ kalır. O halde son domine edilmiş matrix;

		B	
A	a_{ij}	5	6
	2	0	3
	3	6	2

yazılabilir.

BİBLİYOGRAFYA

- Aslan, Prof. Dr. Demir. Üretim Ekonomisi ve politikası A. Ü. İşletme Fakültesi yayınları. Yayın no : 396-53 Sevinç matbaası Ankara 1975.
- Karayalçın, Doç. Dr. İ. İlhami. Hareket Araştırması İ.T.Ü. Yayın no : 730 Gümüşsuyu - İstanbul 1968.
- Jr. Hanshaw, R.C. K. Gülçür, Fazıl, İstatistik karar teorileri, İhtimaller-belirsizlikler. İ.T.A. yayınları. Yayın no : 48-100 Berksoy matbaası İstanbul 1969
- D. Allen, R.G. Mathematical Economics. Macmillan and co LTD Newyork. St martin's press. Toronto, ontorio 1956.
- Taha, A. Hamdy. Operations research an interoduction. The macmillan company. 866 thrid avenue. Newyork Canada. 1971.
- Korum, Dr. Uğur. Matematiksel İstatistiğe Giriş. Ankara Üniversitesi S.B.F. Yayınları No : 317 Ankara Üniversitesi Basın evi. Ankara 1971.
- Kobu, Dr. Bülent. İşletme Matematiği II. İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları Yayın No : 1699/11 Özarkadaş Matbaası. İstanbul 1971
- Kılıçbay, Prof. Dr. Ahmet. Ekonometrik Metodlar ve Araştırma İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları No : 2110/52 Sermet Matbaası. İstanbul 1975
- Şen, Dr. Salim. Temel Üretim Yönetimi — İlkeler ve Uygulamalar — Ankara İ.T.İ.A. Neşriyat ve Yardım Bürosu. Emel Matbaacılık Sanayi Ltd. Şti. Ankara 1974
- Akmut, Doç. Dr. Özdemir. Proje Planlama ve Kontrol Yöntemleri İçinde bölüm 3. Atatürk Üniversitesi Yayınları. İşletme Fakültesi yayın no : 470/57, seri 14. A.Ü. Basınevi - Erzurum 1476.