

## PAPER DETAILS

TITLE: ?????????????? ?????????? ?????????? ??????? ??????? ?????????????? ???????

AUTHORS: ?? ??????????,?? ?????????

PAGES: 0-10

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/819409>

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

**Доц., док. З.К. ИМАНАЛИЕВ**

Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

**Б.Ы. АШИРБАЕВ**

Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Одним из эффективных асимптотических методов в теории сингулярных возмущений является метод пограничных функций, математические основы которого заложены в работах [1,2].

Различным аспектам сингулярных возмущений и метода пограничных функций в задачах оптимального управления посвящены работы А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова [3], А.Б. Васильевой, М.Г. Дмитриева [4], С.В. Белокопытова, М.Г. Дмитриева [5], А.И.Кобрина [6], М.П. Белянина, А.Б. Васильевой [7], Н.Н. Нефедова [8,9].

В данной работе в отличие от указанных выше предложен построения матриц перехода для линейной системы который основан на использование метода пограничных функций и обобщен результаты работ [11,12]

При исследовании задачи оптимального управления линейными или квазилинейными системами высокого порядка первым действием является построение переходной матрицы исследуемой системы. Из-за достаточно высокой размерности матрицы исходной системы вычисление переходной матрицы может оказаться сложной задачей.

Рассматривается однородная система

$$\dot{y} = A(t)y, y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Путем введения малого параметра  $\mu$ , матрицу  $A(t)$  можно представить в форме

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \\ \mu & \mu \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad (2)$$

где  $A_1(t) - (n \times n)$ ,  $A_2(t) - (n \times m)$ ,  $A_3(t) - (m \times n)$ ,  $A_4(t) - (m \times m)$ , матрицы.  $x \in R^n, z \in R^m$ .

Тогда вместо исходной системы получаем систему, состоящая из двух подсистем, характеризующих отдельные фазы общего движения, следующие в определенной очередности.

Предположим что:

1. Матрицы  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$ ,  $A_3(t)$ ,  $A_4(t)$ , определены, равномерно ограничены и

равномерно непрерывны при  $t \in [t_0, t_1]$ .

2. Характеристические значения  $\lambda_i(t)$  матрицы  $A_4(t)$  подчиняется неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq \gamma < 0, \quad (i = \overline{1, m}), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (3)$$

Переходную матрицу  $y(t, t_0, \mu)$  системы (1) можно определить как решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t, t_0, \mu) = A(t, \mu) \cdot Y(t, t_0, \mu), \quad Y(t_0, t_0, \mu) = E_{n+m}. \quad (4)$$

Матрицу  $Y(t, t_0, \mu)$  разобьем на блоки [12]

$$Y(t, t_0, \mu) = \begin{pmatrix} Y_1(t, t_0, \mu) & \mu Y_2(t, t_0, \mu) \\ Y_3(t, t_0, \mu) & \mu Y_4(t, t_0, \mu) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

С учетом (5) из (4) будем иметь

$$\dot{Y}_1 = A_1(t)Y_1 + A_2(t)Y_3, \quad \mu \dot{Y}_3 = A_3(t)Y_1 + A_4(t)Y_3 \quad (6)$$

$$Y_1(t_0, t_0, \mu) = E_n, \quad Y_3(t_0, t_0, \mu) = 0.$$

$$\dot{Y}_2 = A_1(t)Y_2 + A_2(t)Y_4, \quad \mu \dot{Y}_4 = A_3(t)Y_2 + A_4(t)Y_4. \quad (7)$$

$$Y_2(t_0, t_0, \mu) = 0, \quad Y_4(t_0, t_0, \mu) = \frac{1}{\mu} E_m.$$

Решение задачи Коши (6) и (7) представим в виде [3]

$$Y_i(t, t_0, \mu) = \bar{Y}_i(t, t_0, \mu) + \Pi Y_i(\tau, \mu), \quad i=1,2,3,4. \quad (8)$$

где 
$$\bar{Y}_i(t, t_0, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{ik}(t, t_0) \mu^k, \quad i=1,2,3,4 \quad (9)$$

$$\Pi Y_i(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k Y_i(\tau) \mu^k, \quad i=1,2,3,$$

$$\Pi Y_4(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu} \Pi_{-1} Y_4(\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k Y_4(\tau) \mu^k, \quad \tau = \frac{t-t_0}{\mu}. \quad (10)$$

В дальнейшем примем следующее обозначение

$$A_{im}(t_0) = \left. \frac{d^m A_i(t_0 + \tau\mu)}{d\tau} \right|_{\mu=0} \cdot \frac{\tau^m}{m!}, \quad i = \overline{1,4}, \quad m=1,2,\dots$$

**Асимптотическое построение переходной матрицы методом  
пограничных функций**

Подставим равенство (8) в систему (6) и (7), и приравнявая отдельно члены зависящие от  $t$  и  $\tau$  получим системы.

С аргументом  $t$ :

$$\frac{d\bar{Y}_1}{dt} = A_1\bar{Y}_1 + A_2\bar{Y}_3, \quad \mu \frac{d\bar{Y}_3}{dt} = A_3\bar{Y}_1 + A_4\bar{Y}_3 \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{Y}_2}{dt} = A_1\bar{Y}_2 + A_2\bar{Y}_4, \quad \mu \frac{d\bar{Y}_4}{dt} = A_3\bar{Y}_2 + A_4\bar{Y}_4 \quad (12)$$

С аргументом  $\tau$ :

$$\frac{d\Pi Y_1}{d\tau} = \mu A_1\Pi Y_1 + \mu A_2\Pi Y_3, \quad \frac{d\Pi Y_3}{d\tau} = A_3\Pi Y_1 + A_4\Pi Y_3. \quad (13)$$

$$\frac{d\Pi Y_2}{d\tau} = \mu A_1\Pi Y_2 + \mu A_2\Pi Y_4, \quad \frac{d\Pi Y_4}{d\tau} = A_3\Pi Y_2 + A_4\Pi Y_4. \quad (14)$$

Подставляя разложения (9), (10) в (11)–(14) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\mu$  получим систему уравнений относительно  $t$  и  $\tau$  с соответствующими начальными условиями.

При  $\mu^{-1}$  относительно  $\tau$ :

$$\frac{d\Pi_{-1}Y_4(\tau)}{d\tau} = A_{40}(t_0)\Pi_{-1}Y_4(\tau), \quad \Pi_{-1}Y_4(0) = E_m. \quad (15)$$

При  $\mu^0$  относительно  $t$ :

$$\frac{d\bar{Y}_{10}(t, t_0)}{dt} = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)\bar{Y}_{10}(t, t_0), \quad \bar{Y}_{30}(t, t_0) = -A_4^{-1}A_3\bar{Y}_{10}(t, t_0), \quad Y_{10}(t_0, t_0) = E_n. \quad (16)$$

$$\frac{d\bar{Y}_{20}(t, t_0)}{dt} = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)\bar{Y}_{20}(t, t_0), \quad \bar{Y}_{40}(t, t_0) = -A_4^{-1}A_3\bar{Y}_{20}(t, t_0). \quad (17)$$

$$\bar{Y}_{20}(t_0, t_0) = -A_{20}(t_0)A_{40}^{-1}(t_0)$$

При  $\mu^0$  относительно  $\tau$ :

$$\frac{d\Pi_0Y_1(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\Pi_0Y_3(\tau)}{d\tau} = A_{30}(t_0)\Pi_0Y_1(\tau) + A_{40}(t_0)\Pi_0Y_3(\tau). \quad (18)$$

$$\frac{d\Pi_0Y_2(\tau)}{d\tau} = A_{20}(t_0)\Pi_{-1}Y_4(\tau),$$

$$\frac{d\Pi_0 Y_4(\tau)}{d\tau} = A_{30}(t_0)\Pi_0 Y_2(\tau) + A_{40}(t_0)\Pi_0 Y_4(\tau) + A_{41}(t_0)\Pi_{-1} Y_4 \quad (19)$$

где  $A_{i_0}(t_0) = A_i(t_0), i = 1, 2, 3, 4$

Для (15) – (19) имеем начальные условия

$$\bar{Y}_{10}(t_0, t_0) + \Pi_0 Y_1(0) = E_n, \quad Y_{30}(t_0, t_0) + \Pi_0 Y_3(0) = 0 \quad (20)$$

$$Y_{20}(t_0, t_0) + \Pi_0 Y_2(0) = 0, \quad \bar{Y}_{40}(t_0, t_0) + \Pi_0 Y_4(0) = 0 \quad (21)$$

Решения уравнения (15) можно записать в виде

$$\Pi_{-1} Y_4(\tau) = e^{A_4(t_0)\tau}, \quad \Pi_{-1} Y_4(0) = E_m \quad (22)$$

Решения системы (16) – (19) с начальными условиями (20), (21) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Pi_0 Y_1(\tau) &= 0, \quad \Pi_0 Y_2(\tau) = A_{20}(t_0)A_{40}^{-1}(t_0)e^{A_{40}(t_0)\tau}, \\ \Pi_0 Y_3(\tau) &= e^{A_{40}(t_0)\tau} A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Pi_0 Y_4(\tau) = -e^{A_4(t_0)\tau} A_{40}^{-1}(t_0)A_{30}(t_0)A_{20}(t_0)A_{40}^{-1}(t_0) + \int_0^\tau e^{A_4(t_0)(\tau-s)} (A_{41}(t_0) + A_{30}(t_0)A_{20}(t_0)A_{40}^{-1}(t_0)) e^{A_{40}(t_0)s} ds$$

$$\bar{Y}_{10}(t, t_0) = e^{\int_0^t (A_1(\sigma) - A_2(\sigma)A_4^{-1}(\sigma)A_3(\sigma))d\sigma}, \quad \bar{Y}_{30}(t, t_0) = -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)\bar{Y}_{10}(t, t_0), \quad (24)$$

$$\bar{Y}_{20}(t, t_0) = -e^{\int_0^t (A_1(\sigma) - A_2(\sigma)A_4^{-1}(\sigma)A_3(\sigma))d\sigma} \cdot A_{20}(t_0)A_{40}^{-1}(t_0),$$

$$\bar{Y}_{40}(t, t_0) = -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)\bar{Y}_{20}(t, t_0)$$

Для матрицы  $\Pi_0 Y_i(\tau), i=2,3,4$  справедлива следующая оценка на полуинтервале  $(0, \infty)$ .

$$\|\Pi_0 Y_i(\tau)\| \leq C \cdot \exp(-\beta\tau), \quad \tau \geq 0, i = 2, 3, 4. \quad (25)$$

Поступая аналогично с членами разложений порядка  $\mu^p$  можно относительно  $t$  записать следующее:

$$\frac{d\bar{Y}_{1p}}{dt} = A_1(t)\bar{Y}_{1p}(t, t_0) + A_2(t)\bar{Y}_{3p}(t, t_0), \quad \frac{d\bar{Y}_{3p}}{dt} = A_3(t)\bar{Y}_{1p}(t, t_0) + A_4(t)\bar{Y}_{3p}(t, t_0). \quad (26)$$

**Асимптотическое построение переходной матрицы методом  
пограничных функций**

$$\frac{d\bar{Y}_{2p}}{dt} = A_1(t)\bar{Y}_{2p}(t, t_0) + A_2(t)\bar{Y}_{4p}(t, t_0), \quad \frac{d\bar{Y}_{4,p-1}}{dt} = A_3(t)\bar{Y}_{2p}(t, t_0) + A_4(t)\bar{Y}_{4p}(t, t_0). \quad (27)$$

относительно  $\tau$  :

$$\frac{d\Pi_p Y_1(\tau)}{d\tau} = d_{1p}(\tau), \quad \frac{d\Pi_p Y_3(\tau)}{d\tau} = A_{30}(t_0)\Pi_p Y_1(\tau) + A_{40}(t_0)\Pi_p Y_3(\tau) + d_{3p}(\tau). \quad (28)$$

$$\frac{d\Pi_p Y_2(\tau)}{d\tau} = d_{2p}(\tau), \quad \frac{d\Pi_p Y_4(\tau)}{d\tau} = A_{30}(t_0)\Pi_p Y_2(\tau) + A_{40}(t_0)\Pi_p Y_4(\tau) + d_{4p}(\tau). \quad (29)$$

где 
$$d_{1p}(\tau) = \sum_{j=0}^{p-1} A_{1,p-1-j}(t_0)\Pi_j Y_1(\tau) + \sum_{j=0}^{p-1} A_{2,p-1-j}(t_0)\Pi_j Y_3(\tau)$$

$$d_{2p}(\tau) = A_{2p}(t_0)\Pi_{-1} Y_4(\tau) + \sum_{j=0}^{p-1} A_{1,p-1-j}(t_0)\Pi_j Y_2(\tau) + \sum_{j=0}^{p-1} A_{2,p-j}(t_0)\Pi_j Y_4(\tau)$$

$$d_{3p}(\tau) = \sum_{j=0}^{p-1} A_{3,p-j}(t_0)\Pi_j Y_1(\tau) + \sum_{j=0}^{p-1} A_{4,p-j}(t_0)\Pi_j Y_3(\tau)$$

$$d_{4p}(\tau) = A_{4p+1}(t_0)\Pi_{-1} Y_4(\tau) + \sum_{j=0}^{p-1} A_{3,p-j}(t_0)\Pi_j Y_2(\tau) + \sum_{j=0}^{p-1} A_{4,p-j}(t_0)\Pi_j Y_4(\tau)$$

Начальные условия для уравнения  $p$ -го приближения определяются из условия:

$$\bar{Y}_{1p}(t_0, t_0) + \Pi_p Y_1(0) = 0, \quad \bar{Y}_{2p}(t_0, t_0) + \Pi_p Y_2(0) = 0. \quad (30)$$

$$\bar{Y}_{3p}(t_0, t_0) + \Pi_p Y_3(0) = 0, \quad \bar{Y}_{4p}(t_0, t_0) + \Pi_p Y_4(0) = 0. \quad (31)$$

Предположим, теперь, что определены члены разложений (9), (10) до номера  $p$  включительно, т.е. получены следующие частичные суммы

$$Y_{ip}(t, t_0, \mu) = \sum_{j=0}^p [\bar{Y}_{ij}(t, t_0) + \Pi_j Y_i(\tau)] \mu^j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (32)$$

$$Y_{4p}(t, t_0, \mu) = \frac{1}{\mu} \Pi_{-1} Y_4(\tau) + \sum_{j=0}^p [\bar{Y}_{4j}(t, t_0) + \Pi_j Y_4(\tau)] \mu^j. \quad (33)$$

Тогда решения системы уравнений (6), (7) может быть представлены в виде:

$$Y_i(t, t_0, \mu) = \bar{Y}_{ip}(t, t_0, \mu) + \Pi_j Y_i(\tau), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = \overline{1, p}. \quad (34)$$

Справедливо следующее утверждение:

Если выполняется условие (3), то при достаточно малых значениях параметра  $\mu$  для матричных функций  $\bar{Y}_{ip}(t, t_0, \mu)$  и  $\prod_j Y_i(\tau)$  будут справедливы следующие оценки

$$\|\bar{Y}_{ip}(t, t_0, \mu)\| \leq C\mu^{p+1}, \text{ где } i = 1, 2, 3, 4, j = \overline{1, p} \quad (35)$$

$$\|\prod_j Y_i(\tau)\| \leq C \exp(-\beta\tau), \tau \geq 0, \quad (36)$$

С и  $\beta$  некоторые положительные постоянные.

Теперь из разложения (10) выделим определенные числа слагаемых, которые образуют нулевое приближение переходной матрицы  $Y(t, t_0, \mu)$ . Нулевое приближение обозначим через  $Y_0(t, t_0, \mu)$

Рассмотрим порождающую систему, которая получается из (1) при  $\mu = 0$

$$\dot{\bar{x}} = A_1(t)\bar{x} + A_2(t)\bar{z}, \quad 0 = A_3(t)\bar{x} + A_4(t)\bar{z}. \quad (37)$$

Если через  $x(t, \mu) = \bar{x}(t, \mu) + \Pi x(\tau, \mu)$  и  $z(t, \mu) = \bar{z}(t, \mu) + \Pi z(\tau, \mu)$  обозначим решение задачи Коши (1), а через  $x^0(t)$  и  $z^0(t)$  решение порождающей системы (37) при условии  $x(t_0) = x^0$ , то при выполнении условия теоремы А.Н.Тихонова [3] имеем [10]

$$x(t, \mu) = x^0(t) + O(\mu), \quad z(t, \mu) = z^0(t) + \frac{1}{\mu} \Pi_{-1} z(\tau) + O(\mu) \quad (38)$$

где  $\forall t \in [t_0, t_1]$ ,  $\frac{1}{\mu} \Pi_{-1} z(\tau)$ -первый член разложения пограничной функции  $\Pi z(\tau, \mu)$ .

Применяя это положение к задаче (4), можно записать нулевое приближение  $Y_0(t, t_0)$  переходной матрицы  $Y(t, t_0, \mu)$ , которое дает равномерную асимптотику с точностью  $O(\mu)$  на всем интересующем нас отрезке времени:

$$Y_0(t, t_0, \mu) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^t A_0(\lambda) d\lambda} & 0 \\ -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)e^{\int_{t_0}^t A_0(\lambda) d\lambda} + e^{A_4(t_0)\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)} A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0) & e^{A_4(t_0)\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)} \end{pmatrix} \quad (39)$$

где  $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$ .

Из непрерывности матрицы  $A_i(t)$  на отрезке  $[t_0, t_1]$  следует, что в каждой

**Асимптотическое построение переходной матрицы методом  
пограничных функций**

точке  $t \in [t_0, t_1]$  производная функции  $M(t) = \int_{t_0}^t A_0(\lambda) d\lambda$  по верхнему пределу равна подынтегральной функции  $A_0(t)$ , т.е.  $\frac{dM(t)}{dt} = A_0(t)$ .

Теорема 1. Матрица  $Y_0(t, t_0, \mu)$  является решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{Y}_0(t, t_0, \mu) = A_*(t)Y_0(t, t_0, \mu), \quad Y_0(t_0, t_0) = E_{n+m} \quad (40)$$

$$\text{где } A_*(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_0(t) & 0 \\ -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)A_0(t) + \frac{1}{\mu}A_3(t_0) & \frac{A_4(t_0)}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Представим матрицу  $Y_0(t, t_0)$  в виде

$$Y_0(t, t_0, \mu) = V\bar{Y}_0(t, t_0, \mu)V^{-1}, \quad (41)$$

$$\text{где } V = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0) & E_m \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}_0(t, t_0, \mu) = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t A_0(\lambda) d\lambda & 0 \\ 0 & e^{A_4(t_0)\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)} \end{pmatrix}$$

Обозначим через  $\bar{A}(t, \mu)$  матрицу  $\bar{A}(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_0(t) & 0 \\ 0 & \frac{A_4(t_0)}{\mu} \end{pmatrix}$ . Тогда диффе-

ренцируя обе части равенства (41) получим

$$\begin{aligned} \frac{dY(t, t_0, \mu)}{dt} &= V \frac{d\bar{Y}_0(t, t_0, \mu)}{dt} V^{-1} = V \bar{A}(t) \bar{Y}_0(t, t_0, \mu) V^{-1} = V \bar{A}(t) V^{-1} V \bar{Y}_0(t, t_0, \mu) V^{-1} = V \bar{A}(t) V^{-1} Y_0(t, t_0, \mu) = \\ &= A_*(t) Y_0(t, t_0, \mu). \end{aligned}$$

При  $t = t_0$   $Y_0(t_0, t_0) = E_{n+m}$ , ч.т.д.

Теорема 2. Матрица  $A_*(t, \mu)$  определяет систему с разделенными переменными

$$\dot{x} = A_0(t)x, \quad x(t_0) = x^0, \quad (42)$$

$$\mu \tilde{z} = A_4(t_0) \tilde{z} \quad \tilde{z}(t_0) = A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) x^0 + z^0 = \tilde{z}^0,$$

которая аппроксимирует исходной системы (1) с точностью  $O(\mu)$  и при этом имеет место соотношения

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \tilde{z}(t, \mu) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{z}(t, \mu) = -A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) x^0(t) = \bar{z}^0(t),$$

$$\|z^0(t) - \bar{z}^0(t)\| = O(\mu), \quad \text{где} \quad z^0(t) = -A_4^{-1}(t) A_3(t).$$

Действительно, система  $\dot{\bar{Y}}(t, t_0, \mu) = A_*(t, \mu) \bar{Y}(t, t_0, \mu)$ ,  $\bar{Y}(t_0) = Y^0$ ,

где  $\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ ,

в развернутом виде записывается как

$$\dot{\bar{x}} = A_0(t) \bar{x}, \quad \bar{x}(t_0) = x^0,$$

$$\dot{\bar{z}} = -A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) A_0(t) \bar{x} + \frac{1}{\mu} A_3(t_0) \bar{x} + \frac{1}{\mu} A_4(t_0) \bar{z}, \quad \bar{z}(t_0) = z^0.$$

Из второго уравнения имеем  $\frac{d}{dt} (\bar{z} + A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) \bar{x}) = \frac{1}{\mu} A_4(t_0) (\bar{z} + A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) \bar{x})$ .

Если ввести обозначения  $\tilde{z} = \bar{z} + A_4^{-1}(t_0) A_3(t_0) \bar{x}$ , то сразу получается система (42). Из соотношения  $\bar{Y}(t, t_0, \mu) = Y_0(t, t_0, \mu) Y^0$  получим

$$\bar{x}(t) = e^{\int_{t_0}^t A_0(\lambda) d\lambda} x^0, \quad \tilde{z}(t, \mu) = e^{A_4(t_0) \left( \frac{t-t_0}{\mu} \right)} \tilde{z}^0.$$

По условию собственные значения матрицы  $A_4(t)$  удовлетворяет неравенству (3) и отсюда следует, что  $\tilde{z}(t, \mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$  или  $\bar{z}(t, \mu) \rightarrow z^0(t)$ .

Кроме того, из равномерной ограниченности и непрерывности матрицы  $A_3(t), A_4(t)$  в окрестности точки  $t = t_0$  при малых  $\mu$  и справедливо представление  $z^0(t) = \bar{z}^0(t) + O(\mu)$ . ч.т.д.

Следует отметить, что вектор переменного состояния сопряженного уравнения соответствующая уравнению (1) содержит малый параметр  $\mu$ . Это утверждается следующей теоремой.

**Теорема 3.** Сопряженным уравнением соответствующее уравнению

**Асимптотическое построение переходной матрицы методом  
пограничных функций**

$$\dot{Y}(t, \mu) = A(t, \mu)Y(t, \mu), \text{ где } A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{A_3(t)}{\mu} & \frac{A_4(t)}{\mu} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \mu -$$

малый параметр, является уравнение  $\dot{\psi}(t, \mu) = -A'(t, \mu)\psi(t, \mu)$ ,

$$\text{где } A'(t, \mu) = \begin{pmatrix} A'_1(t) & \frac{A'_3(t)}{\mu} \\ A'_2(t) & \frac{A'_4(t)}{\mu} \end{pmatrix}, \psi(t, \mu) = \begin{pmatrix} p \\ \mu q \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Вектор  $\psi(t, \mu) = \begin{pmatrix} p \\ \mu q \end{pmatrix}$  является сопряженным вектору

$y(t, \mu) = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  тогда и только тогда, когда  $\psi' \cdot y = \text{const}$  или  $p'x + \mu q'z = \text{const}$ .

Дифференцируя сумму  $p'x + \mu q'z$  получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p'x + \mu q'z) &= \frac{d}{dt}(p'x) + \mu \frac{d}{dt}(q'z) = p'x + p'x + \mu q' + \mu q'z = p'(A_1x + A_2z) - (p'A_1 + q'A_3)x + \\ &+ q'(A_3x + A_4z) - (p'A_2 + q'A_4)z = p'(A_1 - A_4)x + p'(A_2 - A_2)z + q'(A_4 - A_3)z = 0. \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -a_3x_3, \mu \dot{x}_3 = -x_3, \quad (43)$$

с начальными условиями  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ ,

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = -\frac{1}{\mu},$$

$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  Переходную матрицу  $Y(t, 0, \mu)$  системы (43) можно определить как

решение матричного дифференциального уравнение

$$\dot{Y}(t,0,\mu) = A(t,\mu)Y(t,0,\mu), Y(0,0,\mu) = E_{2+1} \quad (44)$$

Матрицу  $Y(t,0,\mu)$  найдем по алгоритму как показано выше и представим ее в виде:

$$Y(t,0,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & t & -a_3\mu t + a_3\mu^2 - a_3\mu^2 e^{-\frac{t}{\mu}} \\ 0 & 1 & -\mu a_3 + \mu a_3 e^{-\frac{t}{\mu}} \\ 0 & 0 & \mu e^{-\frac{t}{\mu}} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Тогда решение системы (43) с учетом (45) имеет вид:

$$x_1(t,\mu) = 1 + t - a_3\mu t + a_3\mu^2 - a_3\mu^2 e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad x_2(t,\mu) = 1 - a_3\mu + a_3\mu e^{-\frac{t}{\mu}}, \quad x_3(t,\mu) = e^{-\frac{t}{\mu}}.$$

Это есть точное решение системы (43).

Если положить  $\mu = 0$  в системе (43), то получим решение которые называется вырожденной

$$\bar{x}_1(t) = 1 + t, \quad \bar{x}_2(t) = 1, \quad \bar{x}_3(t) = 0. \quad (46)$$

Рассмотрим приближенное решение системы (43). С учетом (39) имеем

$$\tilde{Y}(t,0,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{\mu}} \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы (43) можно записать в виде:

$$\tilde{x}_1(t,\mu) = 1 + t, \quad \tilde{x}_2(t,\mu) = 1, \quad \tilde{x}_3(t,\mu) = e^{-\frac{t}{\mu}}. \quad (47)$$

На рис.1 показаны графики переменного состояния  $x_3(t)$ , решения системы (43) при различных значениях параметра  $\mu$ .

Решение  $\tilde{x}_i(t,\mu)$  содержит пограничную функцию и в отличие от  $\bar{x}(t)$  - вырожденного решение системы (43), оно удовлетворяет заданному начальному условию. При  $\mu \rightarrow 0$  пограничная функция экспоненциально затухает и  $\tilde{x}_i(t,\mu) \rightarrow \bar{x}_i(t)$ , ( $i=1,2,3$ ).

Асимптотическое построение переходной матрицы методом  
пограничных функций

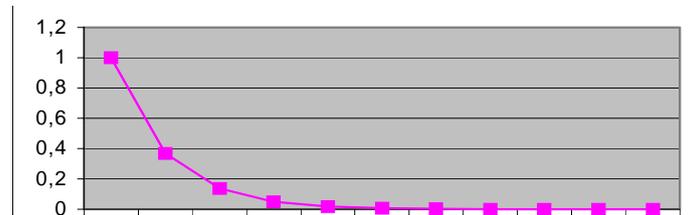


Рис.1

Таким образом, функция  $\tilde{x}(t, \mu)$  является равномерным асимптотическим приближением для  $x(t, \mu)$  с точностью  $\mu$ .

В заключении следует отметить, что асимптотика переходной матрицы полной системы построена в форме расщепления на несколько матриц меньшей размерности, причем только двое из них являются определяющими, что позволяет уменьшить объем вычислительных работ

#### ЛИТЕРАТУРА

1. ВАСИЛЬЕВА А.Б.. **Успехи математических наук.** 1963. 18. №3. С. 15-86.
2. ВИШИК М.И., ЛЮСТЕРНИК Л.А. **Успехи математических наук.** 1957. 12. №5. С. 3-12.
3. ВАСИЛЬЕВА А.Б., БУТУЗОВ В.Ф.. **Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений**:- М. Высш.шк., 1973, 272с.
4. ВАСИЛЬЕВА А.Б., ДМИТРИЕВ М.Г.. **Итоги науки и техники.** Сер. Матем. анализ. Т.20 –М. ВИНТИ, 1982. С.3-77.
5. БЕЛОКОПЫТОВ С.В., ДМИТРИЕВ М.Г.. **Известия АН.СССР.** Сер. Технич. кибернет. 1985. №3. С.147-152.
6. КОБРИН А.И.. **Прикладная математика и механика.** 1969. 33. Вып.3. С. 431-440.
7. БЕЛЯНИН М.П., ВАСИЛЬЕВА А.Б.. **Вычисл. Матем. и матем. физ.** 1988. 28. №2. С.224-236.
8. НЕФЕДОВ Н.Н. **Вестник МГУ.** Сер. **Вычисл. Матем и кибернетика.** 1978. №1. С. 28-35.
9. НЕФЕДОВ Н.Н.. **Вычисл. Матем и матем. физ.** 1978. 18. №1. С.94-105.
10. МОИСЕЕВ Н.Н.. **Математические задачи системного анализа.**-М.: Наука, 1981, 488с.
11. ИМАНАЛИЕВ З.К., АШИРБАЕВ Б.Ы. **В сб: Международной научной конференции посвященной 70 летию академика М.И. Иманалиева.**-Бишкек: КГНУ, 2001.- С. 235-239.
12. ИМАНАЛИЕВ З.К., ПАХЫРОВ З.П., АШИРБАЕВ Б.Ы., БАРАКОВА Ж.Т. **В сб.: Международной научной конференции «Современные технологии и управления качеством образования, науке и производстве».**- Бишкек, 2001.-С. 244-250.