АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ОТСУТСТВИИ СПЕКТРА ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Омуралиев А.С.

Кыргызско-Турецкий университет “Манас”, Инженерный факультет, Бишкек, Кыргызстан
E-mail: asan.omuraliev@manas.kg

Аннотация

В статье строится регуляризованная асимптотика решения многомерной сингулярно возмущенной параболической задачи, когда предельный опертаор не имеет спектр. Показана, что асимптотика решения такой задачи, в отличии от скалярной задачи, содержит угловые погранслойные функции. Угловые погранслойные функции выражаются произведением параболических погранслойных функций.

Ключевые слова: регуляризованная асимптотика, угловые погранслойные функции, угловой параболический пограничный слой.

THE ASYMPTOTIC OF THE SOLUTION OF MULTI DIMENSIONAL SINGULAR PERTURBANCE PARABOLIC PROBLEM FOR LACK OF SPECTRUM OF OPERATOR LIMIT

Abstract

A regularized asymptotics of solution for multi dimensional singulary perturbed parabolic problem is built when limit operator hasn’t spectrum. The asymptotics of such problems includes parabolic boundary layer functions. The corner boundary layer functions describe product of parabolic boundary layer functions.

Key words: regularized asymptotics, corner boundary layer functions, parabolic boundary layer functions.

Введение

В статье изучается двумерная сингулярно возмущенная параболическая задача

$$L_\varepsilon u(x, t, \varepsilon) \equiv \partial_t u(x, t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta u(x, t, \varepsilon) - b(x, t)u(x, t, \varepsilon) = f(x, t),$$

$$(x,t) \in \Omega \times (0, T], \qquad u|_{t=0} = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2),\ \Omega = \{(x_1,x_2) : x_i \in (0,1),\ i = 1,2\},\ \Delta = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2},\ \partial_x \equiv \partial^2/\partial x^2$$

при $\varepsilon \to 0$. Заданные функции $b(x, t)$, $f(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Эта задача в скалярном случае, с позиций метода регуляризации для сингулярно возмущенных [1], изучена в [2, Гл. 1] и построена асимптотика решения содержащая параболические погранслойные функции. Если обыкновенный пограничный слой описывается экспоненциальной функцией [1], [3], то параболический пограничный слой описывается функцией *erfc(x)* (см.[2]). В многомерном случае, когда малый параметр стоит при одной из пространственной производной, качественное изменение не происходит, т.е. полученная асимптотика будет содержать только параболические погранслойные функции. Если же малый параметр стоит перед лапласианом, то асимптотика решения содержит, наряду с параболическими погранслойными функциями, и угловые параболические погранслойные функции. Угловые пограничные слои описывающие произведением параболических погранслойных функций мы назвали *угловым параболическим пограничным слоем*.

Регуляризация задачи

Для регуляризации задачи (1) вводим следующие регуляризующие переменные:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon},\quad \xi_2 = \frac{1-x_1}{\varepsilon},\qquad \eta_1 = \frac{x_2}{\varepsilon},\qquad \eta_2 = \frac{1-x_2}{\varepsilon}, \tag{2}$$

и вместо искомой функции $u(x, t, \varepsilon)$ будем изучать расширенную функцию $u(x, t, \theta, \varepsilon)$, $\theta = (\xi, \eta)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ такую, что ее сужение, в соответствии с (2), совпала с искомой функцией, т.е.

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)} = u(x, t, \varepsilon),\ M = (x, t, \theta),\ \theta \equiv (\xi, \eta),\ \theta(x, \varepsilon) \equiv \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{1-x}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Принимая во внимание (2), из (3) найдем производные

$$\partial_t u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial_t \tilde{u}(M,\varepsilon))|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)},$$

$$\partial_{x_1} u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial_{x_1} \tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon}\partial_{\xi_l}\tilde{u}(M,\varepsilon))|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)},$$

$$\partial_{x_2} u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial_{x_2} \tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon}\partial_{\eta_l}\tilde{u}(M,\varepsilon))|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)},$$

$$\partial^2_{x_1} u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial^2_{x_1} \tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{l=1}^{2}[\frac{1}{\varepsilon^2}\partial^2_{\xi_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}L_{\xi,l}\tilde{u}(M,\varepsilon)])|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)},$$

$$\partial^2_{x_2} u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial^2_{x_2} \tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{l=1}^{2}[\frac{1}{\varepsilon^2}\partial^2_{\eta_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}L_{\eta,l}\tilde{u}(M,\varepsilon)])|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)},$$

$$L_{\xi,l}\equiv2(-1)^{l-1}\partial^2_{x_l,\xi_l},\quad L_{\eta,l}\equiv2(-1)^{l-1}\partial^2_{x_1,\eta_l}. \tag{4}$$

На основании (3), (4), вместо задачи (1), поставим расширенную задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon)=\partial_t \tilde{u}(M,\varepsilon)-\Delta_\xi \tilde{u}(M,\varepsilon)-\Delta_\eta \tilde{u}(M,\varepsilon)-b(x,t)\tilde{u}(M,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon L_\xi \tilde{u}(M,\varepsilon)-\varepsilon L_\eta \tilde{u}(M,\varepsilon)-\varepsilon^2\Delta\tilde{u}(M,\varepsilon)=f(x,t),\quad M\in Q,$$

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=0}=0,\quad \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\partial Q}=0, \tag{5}$$

$$\Delta_\xi=\sum_{l=1}^{2}\partial^2_{\xi_l},\quad \Delta\eta=\sum_{l=1}^{2}\partial^2_{\eta_l},\quad L_\xi=\sum_{l=1}^{2}L_{\xi,l},\quad L_\eta=\sum_{l=1}^{2}L_{\eta,l},$$

$$Q=\{(x,t,\theta): x\in\Omega;\ t\in(0,T];\ \xi,\eta\geq0\}.$$

Если мы найдем решение $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ расширенной задачи (5), то сужение его при $\theta=\theta(x,\varepsilon)$ будет решением задачи (1), ибо

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\theta(x,\varepsilon)}\equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon). \tag{6}$$

Решение расширенной задачи (5) определяем в виде разложения:

$$\widetilde{u}\,(M,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}u_i(M)+\varepsilon^{n+1}R_{\varepsilon,n}(M). \quad (7)$$

Для коэффициентов этого разложения, на основании задачи (5), получим следующие итерационные задачи:

$$Tu_0(M)\equiv \partial_t u_0(M)-\Delta_\xi u_0(M)-\Delta_\eta u_0(M)-b(x,t)u_0(M)=f(x,t),$$

$$Tu_i(M)=L_\xi u_{i-1}(M)+L_\eta u_{i-1}(M)+\Delta u_{i-2}(M), \quad (8)$$

$$u_i(M)|_{t=0}=0,\ u_i(M)|_{\partial Q}=0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

$$\widetilde{L}_\varepsilon R_{\varepsilon,n}(M)=g_n(M,\varepsilon),\ R_{\varepsilon,n}(M)|_{t=0}=R_{\varepsilon,n}(M)|_{\partial Q}=0, \quad (9)$$

$$g_n(M,\varepsilon)=L_\xi u_n(M)+L_\eta u_n(M)+\Delta u_{n-1}(M)+\varepsilon\Delta u_n(M).$$

Пространство решений

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи (8):

$$U=\{u(M):\ u(M)=v(x,t)+\sum_{l=1}^{2}[c_l(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}})+\omega_l(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})]+$$

$$+\sum_{k,l=1}^{2}y_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}),\ c_l(x,t),\omega_l(x,t),y_{k,l}(x,t)\in C^{\infty}(\overline{\Omega}\times[0,T]),$$

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\exp(-s^2)ds\}.$$

Входящие сюда специальные функции

$$erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}),\ erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})$$

описывают параболические пограничные слои вдоль $x_1=l-1$, $x_2=l-1$, $l=1,2$ соответственно, а их произведения

$$erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}),\ k = 1,\ 2;\ l = 1,2,$$

описывают угловой пограничный слой вдоль ребер *(0, 0, t), (0, 1,t), (1,0,t), (1,1, t)*. Для угловых погранслойных функций справедливы оценки (см.[2, 4])

$$|erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})| \le c\ exp(-\frac{\xi_k^2+\eta_l^2}{8t})$$

В общем случае итерационные уравнения (8) можно записать в виде

$$Tu(M) = H(M). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть правая часть* H*(M)*$\in$ *U, т.е.представима в виде*

$$H(M)=p(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\ [q_{1,l}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}})+q_{2,l}(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})]+$$

$$+\sum_{k,l=1}^{2}\ d_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}).$$

Уравнение (10) разрешимо в классе U тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения

$$\partial_t v(x,t) = b(x,t)v(x,t) +p(x,t),$$

$$\partial_t c_l(x, t) = b(x, t)c_l(x, t) + q_{1,l}(x, t),$$

$$\partial_t \omega_l(x, t) = b(x, t)\omega_l(x, t) + q_{2,l}(x, t),$$

$$\partial_t y_{k,l}(x, t) = b(x, t)y_{k,l}(x,t) + d_{k,l}(x, t). \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда при дополнительных условиях*

1. $u(M)|_{t=0} = 0,\quad u(M)\,|_{x_1=l-1,\xi_l=0} = u(M)\,|_{x_2=l-1,\eta_l=0} = 0,\quad l = 1,2;$

2. $L_\xi u(M) = 0,\quad L_\eta u(M) = 0$

уравнение (10) однозначно разрешимо в классе U.

Доказательство теорем просты и проводится аналогично работе [2].

Решение итерационных задач

Используя теоремы 1 и 2, построим решение итерационных задач (8). Согласно теореме 1, уравнение $(8, i = 0)$ имеет решение в U и оно представимо в виде

$$u_0(M)=v_0(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\left[c_{0,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)+\omega_{0,l}(x,t)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k,l=1}^{2} y_{k,l}^{0}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right), \qquad (12)$$

если функции $v_0(x,t)$, $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y_{k,l}^{0}(x,t)$ являются решениями уравнений

$$\partial_t v_0(x,t) = b(x,t)v_0(x,t) + f(x,t),\ \partial_t c_{0,l}(x,t) = b(x,t)c_{0,l}(x,t),$$

$$\partial_t \omega_{0,l}(x,t) = b(x,t)\omega_{0,l}(x,t),\ \partial_t y_{k,l}^{0}(x,t) = b(x,t)\, y_{k,l}^{0}(x,t),\ l,k = 1,2. \qquad (13)$$

Удовлетворим функцию (12) начальному условию. Учитывая, что

$$\lim_{t\to 0} erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) = \lim_{t\to 0} erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right) = 0,$$

начальные условия, для функций $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y_{k,l}^{0}(x,t)$ при $t = 0$, задав произвольно, мы получим

$$v_0(x,t)|_{t=0} = 0,\ c_{0,l}(x,t)|_{t=0} = r_{0,l}(x),$$

$$\omega_{0,l}(x,t)|_{t=0} = g_{0,l}(x),\ y_{k,l}^{0}(x,t)|_{t=0} = z_{k,l}^{0}(x). \qquad (14)$$

Здесь $r_{0,l}(x)$, $g_{0,l}(x)$, $z_{k,l}^{0}(x)$- произвольные функции. Эти произволы будут использованы для обеспечения разрешимости итерационных задач в классе U.

Удовлетворяя функцию (12) граничным условиям из 8), получим

$$c_{0,l}(x,t)\Big|_{x_1=k-1} = -v_0(x,t)\Big|_{x_1=k-1},\quad y^0_{k,l}(x,t)\Big|_{x_1=k-1} = -\omega_{0,l}(x,t)\Big|_{x_1=k-1},\ k,l=1,2,$$

$$\omega_{0,l}(x,t)\Big|_{x_2=l-1} = -v_0(x,t)\Big|_{x_2=l-1},\ y^0_{k,l}(x,t)\Big|_{x_2=l-1} = -c_{0,k}(x,t)\Big|_{x_2=l-1}. \tag{15}$$

Решения уравнений (13), при соответствующих начальных условиях из (14), запишутся в виде

$$v_o(x,t) = \int_0^t f(x,s)B(x,t)B^{-1}(x,s)ds,\quad c_{0,l}(x,t) = r_{0,l}(x)B(x,t),\ \omega_{0,l}(x,t) = g_{0,l}(x)B(x,t),$$

$$y^0_{k,l}(x,t) = z^0_{k,l}(x)B(x,t),\ B(x,t)=\exp\left(\int_0^t b(x,s)\,ds\right),\ k,l=1,2. \tag{16}$$

Подставив их в (15), определим

$$r_{0,l}(x)\Big|_{x_1=l-1} = -(B^{-1}(x,t)v_0(x,t))\Big|_{x_1=l-1},\ g_{0,l}(x)\Big|_{x_2=l-1} = -(B^{-1}(x,t)v_0(x,t))\Big|_{x_2=l-1},$$

$$z^0_{k,l}(x)\Big|_{x_1=k-1} = -g_{0,l}(x)\Big|_{x_1=k-1},\ z^0_{k,l}(x)\Big|_{x_2=l-1} = -r_{0,l}(x)\Big|_{x_2=l-1},\ k\ l=1,2. \tag{17}$$

В соответствии с теоремой 2, для разрешимость уравнения (8, $i=1$) в классе U, потребуем выполнения условий

$L_\xi u_0(M) = 0,\qquad L_\eta u_0(M) = 0,$

которые приводятся к соотношениям

$$2\sum_{l=1}^{2}\partial_{x_l} c_{0,l}(x,t)\,\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)=0,\qquad 2\sum_{l=1}^{2}\partial_{x_l}\omega_{0,l}(x,t)\,\partial_{\eta_l}\left(erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)=0$$

$$2\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{x_l} y^0_{k,l}(x,t)\,\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)\left(erfc\left(\frac{\eta_k}{2\sqrt{t}}\right)\right)=0,$$

$$2\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{x_k} y^0_{k,l}(x,t)\,\partial_{\eta_k}\left(erfc\left(\frac{\eta_k}{2\sqrt{t}}\right)\right)\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)=0.$$

Обеспечивая выполнения этих соотношений, относительно функций $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y_l{}^0{}_k(x,t)$ получим дифференциальные уравнения. В полученные дифференциальные уравнения подставим значения этих функций из (16). Решая дифференциальные уравнения относительно $r_{0,l}(x)$, $g_{0,l}(x)$, $z^0_{k,l}(x)$ при начальном условии (17) определим эти функции, а, следовательно, и функции $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y^0_{k,l}(x,t)$. Этим мы полностью определили главный член асимптотики и обеспечили разрешимость в U следующего итерационного уравнения (8, i = 1).

Уравнение (8, i = 1) однородное, поэтому по теореме 1 оно разрешимо *в* U и его решение представимо в виде (12) с индексом 1, если функции $v_1(x,t)$, $c_{1,l}(x,t),\omega_{1,l}(x,t)$, $y^1_{k,l}(x,t)$ являются решениями однородных уравнений, аналогичных (11). Из краевых условий (8), на основании вышеприведенных рассуждений приведшие к соотношениям (14),(15), мы получим

$$v_1(x,t)|_{t=0} = 0,\quad c_{1,l}(x,t)|_{t=0} = r_{0,l}(x),\quad \omega_{1,l}(x,t|_{t=0} = g_{1,l}(x),\quad y^1_{k,l}(x,t)|_{t=0} = z_k{}^1{}_{,l}(x),$$

$$c_{1,l}(x,t)\Big|_{x_1=l-1} = -v1(x,t)\Big|_{x_1=l-1},\quad y^1_{k,l}(x,t)\Big|_{x_1=k-1} = -\omega_{1,l}(x,t)\Big|_{x_1=k-1},$$

$$\omega_{1,l}(x,t)\Big|_{x_2=l-1} = -v_1(x,t)\Big|_{x_2=l-1},\quad y^1_{k,l}(x,t)\Big|_{x_2=k-1} = -c_{0,k}(x,t)\Big|_{x_2=k-1}\quad k = 1,2,. \qquad (18)$$

В силу однородности уравнения относительно $v_1(x,t)$ и нулевого начального условия, а также, в силу того, что функции $c_{1,l}(x,t),\omega_{1,l}(x,t)$, $y^1_{k,l}(x,t)$ выражаются через $v_1(x,t)$, мы получим

$$v_1(x,t) = 0,\ c_{1,l}(x,t) = 0,\ ,\omega_{1,l}(x,t) = 0,\ \ y^1_{k,l}(x,t) = 0,$$

т.е. $u_1(M) = 0$.

Продолжая этот процесс, мы можем найти все коэффициенты частичной суммы разложения (7), при этом коэффициенты с нечетными индексами обратятся в нуль.

Вернемся к исходной задаче (1). При ее регуляризации было использовано свойство (6), которое является необходимым условием регуляризации [1] задачи (1). Оно было использовано при переходе от задачи (1) к задаче (5). Можно показать, что сужение

$$u_{\varepsilon,2n}(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{2i} u_{2i}(M)|_{\theta=\theta(x,t,\varepsilon)} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{2i}\{v_{2i}(x,t)+$$

$$\sum_{l=1}^{2} [c_{2i,l}(x,t)\, erfc(\frac{(-1)^{l-1}(x_1 - l + 1)}{2\sqrt{t}}) + \omega_{2i,l}(x,t)\, erfc(\frac{(-1)^{l-1}(x_2 - l + 1)}{2\sqrt{t}})] +$$

$$+\sum_{k,l=1}^{2} y_{k,l}^{2i}(x,t)\, erfc(\frac{(-1)^{l-1}(x_1 - k + 1)}{2\sqrt{t}}) erfc(\frac{(-1)^{l-1}(x_2 - l + 1)}{2\sqrt{t}})\,\} \quad (19)$$

частичной суммы разложения (7), является формальным асимптотическим решением задачи (1).

Оценка остаточного члена

Произведем в задаче (9) сужение посредством регуляризующих функций, т.е. положим в обеих частях уравнения $\theta = \theta(x,\varepsilon)$. Далее, учитывая тождество (6), для остаточного члена

$$R_{\varepsilon,2n}(x, t) = R_{\varepsilon,2n}(x, t, \theta(x, \varepsilon)) = u(x, t, \varepsilon) - u_{\varepsilon,2n}(x, t, \varepsilon)$$

получим задачу

$$L_\varepsilon R_{\varepsilon,2n}(x, t) = g_{2n}(x, t, \theta(x, \varepsilon), \varepsilon), \quad R_{\varepsilon,2n}(x, t)|_{t=0} = 0,\ R_{\varepsilon,2n}(x, t)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу наших построений и сделанных предположений функция $g_{2n}(x, t, \theta(x,\varepsilon), \varepsilon)$ равномерно ограничена по ε и непрерывна по x,t в изучаемой области для любого номера $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 3. *Пусть функции* $f(x,t)$, $b(x,t) \in C^{2(n+1)}(\bar{\Omega})$. *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$||u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,2n}(x,t,\varepsilon)|| < c\varepsilon^{2n+1}$$

$n = 0,1,2,\ldots$, *т.е. разложение (19) является асимптотическим решением задачи (1) при* $\varepsilon \to +0$ *и это разложение единственно в классе U.*

Доказательство проводится аналогично работе [4] и основано на принципе максимума [5, стр.22].Теорема доказана.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

2. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. Бишкек, 2005.

3. Васильева А.Б.,Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

4. Омуралиев А.С. Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи //Ж. вычисл. матем. и матем.физ. 2006. Т.46. N 8. С.1423-1432.

5. Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.