

PAPER DETAILS

TITLE: Logaritma Fonksiyonunun Irrasyonel Fonksiyon ile Temsili ve Bu Temsile Dayalı Üstel Fonksiyon Elde Edilmesi Üzerine

AUTHORS: Müslüm ÖZISIK

PAGES: 542-549

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1743493>



Logaritma Fonksiyonunun İrrasyonel Fonksiyon İle Temsili ve Bu Temsile Dayalı Üstel Fonksiyon Elde Edilmesi Üzerine

Müslüm Özışık^{1*}

^{1*} Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye, (ORCID: 0000-0001-6143-5380), ozisik@yildiz.edu.tr

(İlk Geliş Tarihi 30 Nisan 2021 ve Kabul Tarihi 24 Temmuz 2021)

(DOI: 10.31590/ejosat.930694)

ATIF/REFERENCE: Özışık, M., (2021). Logaritma Fonksiyonunun İrrasyonel Fonksiyon İle Temsili ve Bu Temsile Dayalı Üstel Fonksiyon Oluşturulması. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (25), 542-549.

Öz

Bu çalışmada matematikte çok yaygın bir kullanım alanına sahip olan en temel fonksiyonlardan olan logaritma fonksiyonunun irrasyonel bir fonksiyon ile temsil edilmesi üzerine çalışılmıştır. Bu amaçla logaritma fonksiyonu yerine kullanılabilecek irrasyonel bir fonksiyon önerisi yapılmış, uygun matematik ve nümerik analiz tanım ve yöntemleri çerçevesinde önerilen fonksiyon elde edilmiştir. Elde edilen irrasyonel fonksiyon üzerinden ters fonksiyonu oluşturulmak suretiyle üstel fonksiyonlar için yeni bir yaklaşım elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar ve grafikler elde edilerek gerekli değerlendirmeler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Logaritma, Doğal Logaritma, Napier, Euler.

On the Representation of the Logarithm Function by the Irrational Function and the Obtaining of an Exponential Function Based on This Representation

Abstract

In this study, the representation of the logarithm function, which is one of the most basic functions that has a very common usage area in mathematics, has been studied with an irrational function. For this purpose, an irrational function that can be used instead of a logarithm function has been proposed, and the proposed function has been obtained within the framework of appropriate mathematical and numerical analysis definitions and methods. A new approach has been obtained for exponential functions by constructing the inverse function on the obtained irrational function. Necessary evaluations were made by obtaining numerical results and graphics.

Keywords: Logarithm, Natural Logarithm, Napier, Euler.

* Sorumlu Yazar: Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye ozisik@yildiz.edu.tr

1. Giriş

Logaritma fonksiyonu matematik ve bilimin en temel ve vazgeçilmez fonksiyonlarından biridir. Logaritma hesabının temelini teşkil eden üslü sayıların logaritmasını ilk tanımlayan Michael Stifel (1487-1567) olmuş aynı zamanda 2 sayısının kuvvetlerini incelemiştir. Ancak farklı birçok taban kullanmak suretiyle logaritmayı gerçek anlamda kullanan John Napier (1550-1617) olmuştur. Napier'in logaritma ile olan çalışmaları genel olarak cebire dayanmaktaydı ve logaritma ile ilgili ilç çalışmasını 1614 yılında "A Description of the Wonderful Table of Logarithms (Harika Logaritma Tablosunun bir Açıklaması)" adı altında yayınladı. Napier bu çalışmasında Yunanca "logos" ve "arithmo" kelimelerini sayılar ve logaritmalarını ifade etmek üzere bir arada "logaritma" olarak kullanmış, logaritmayı da "doğal" ve "yapay" olarak isimlendirmiştir. (Günümüzde $y = \ln_e x$ doğal logaritma ifadesi aynı zamanda Napier logaritması olarak da bilinmektedir.) Aynı dönemde Henry Briggs (1551-1630) ve Joost Burgi (1552-1632) de üstel işlemlerle uğraşmış olan matematikçiler arasındadır. Ancak Burgi'nin logaritma ile ilgili çalışmaları Napier'den farklı olarak cebire değil geometriye dayanmaktaydı. Günümüzde kullanılan logaritma ise bilime Leonhard Euler (1707-1783) tarafından kazandırılmıştır. Napier logaritmasında da kullanılan "e sabitinin" ilk defa 1727 yılında ifade edilmesi, 1737 yılında e sayısının irrasyonel olduğunun gösterilmesi, 1748 yılında da virgülden sonraki ilk 18 basamağının hesaplanması Euler tarafından logaritma hesabına ilişkin yapılmış çalışmalardan bazıları olup (Boyer 1991; Havil, 2003; Kathleen ve Montelle, 2011; Bruce, 2000; Fauvel, 2000; Rice ve ark., 2017) kaynaklarında yer almaktadırlar.

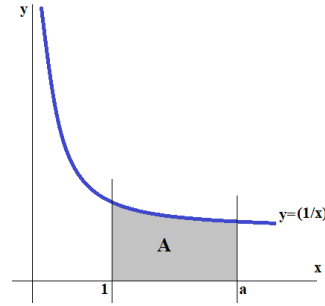
Gerek doğal logaritma gerekse logaritma fonksiyonu matematik ve mühendislik alanında temsil edilen birçok problemin içerisindeki yaygın kullanımına bağlı olarak her daim geniş bir ilgi alanına sahip olmuştur. Doğal logaritmanın Gaussian Hipergeometrik Fonksiyonlarla temsil edilmesi (Nofal, 2006), logaritmanın interpolasyon ile hesaplanması (Gautschi, 2008), q-logaritması için irrasyonel ölçümleme teknikleri üzerinde yapılan çalışmalar (Matala-Aho ve ark., 2005; Koelink ve Assche, 2009), logaritmik diferansiyel formlar, rezüdüler ve vektör alanları ile ilgili (Aleksandrov, 2014; Pol, 2018; Tajima ve Nabeshima, 2021) çalışmaları örnek olarak gösterilebilir. Doğal olarak diğer mühendislik alanlarından farklı olarak matematiğin temelini oluşturan bazı klasik kavram ve konularda çoğu zaman kısa zaman dilimleri içerisinde köklü bir tanım, anlam değişikliği olmaz. Daha ziyade uygulama alanları ve tekniklere ilişkin genişlemeler, yorumlar ve yöntemlere dair farklılıklar söz konusu olur. Bu yönüyle logaritma ve üstel işlemler bu alanlardan biridir.

Bu çalışmada, yukarıda kısaca özetlenen, matematik, mühendislik ve bilimin en temel kavram ve fonksiyonlarından olan logaritma ve üstel fonksiyona dair çalışma yapılmıştır. Logaritma fonksiyonunun irrasyonel fonksiyon ile temsiline ilişkin olarak fonksiyon önerisinde bulunulmuş, önerilen fonksiyon tanımlanmış, daha sonra bu fonksiyon uygun matematiksel ve nümerik yöntemler ile elde edilerek logaritma fonksiyonunun irrasyonel fonksiyon ile temsil edilebileceği sayısal ve grafiksel sonuçlarla gösterilmiştir. Sonrasında elde edilen fonksiyona bağlı olarak ters fonksiyonu elde edilmek suretiyle üstel işlemler için de kullanılabilecek üstel fonksiyon ifade edilmiş ve grafiksel olarak matematikte mevcut durumda kullanılan üstel fonksiyon ile karşılaştırılmıştır.

2. Fonksiyonun Tanımlanması ve Çözüm

2.1. Logaritma fonksiyonunun tanımı

Matematikte doğal logaritma fonksiyonu genel olarak;



Şekil 1. Logaritmanın bir eğrinin altındaki alan olarak ifadesi

şekildeki gibi $y = (1/x)$ eğrinin altında ve $(y \geq 0, 1 \leq x \leq a)$ ile sınırlı olan düzlemsel bölgenin alanı olarak

$$A = \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$A = \ln x \Big|_{x=1}^a \quad (1)$$

$$A = \ln a$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla doğal logaritma fonksiyonunun genel ifadesi

$$0 \leq x < \infty; e \cong 2,718281... \text{ olmak üzere,}$$

$$y = f(x) = \ln_e x = \ln x \quad (2)$$

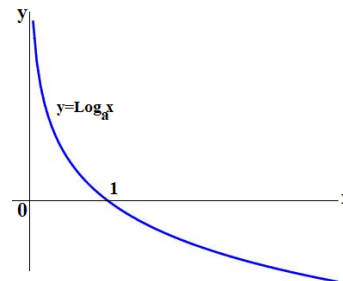
olarak verilir.

Doğal logaritma fonksiyonuna benzer olarak logaritma fonksiyonu ise genel olarak bütün matematik kitaplarında;

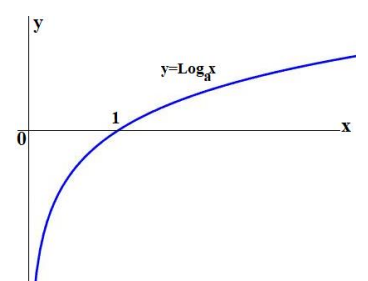
$$\forall a, x > 0 \text{ ve } a \neq 1 (a : \text{logaritma tabanı}) \text{ olmak üzere;}$$

$$y = f(x) = \log_a x \quad (3)$$

olarak tanımlanmış olup grafikleri aşağıdaki gibidir. (Kreyszig, 1993; Andrews ve ark., 1999; Thomas ve ark. 2010).



Şekil 2. $x > 0, 0 < a < 1$ için $\log_a x$ grafiği



Şekil 3. $x > 0, a > 1$ için $\log_a x$ grafiği

2.1.1. İrrasyonel fonksiyon önerilmesi ve elde edilmesi

Logaritma fonksiyonunun Şekil 2. ve Şekil 3. ile verilen genel grafikleri dikkate alındığında bu eğrilerin benzer irrasyonel

eğrilerle temsil edilebileceği (genel anlamda $\sqrt[p]{x}-1$, $x>0$, $q \in \mathbb{Z}^+$ formunda) fikri hareket noktasının temelini oluşturmuştur.

Dolayısıyla;

$S\log_a x$ fonksiyonu, $y = f(x) = \log_a x$ fonksiyonun temsili için önerilen irrasyonel fonksiyon olmak üzere bu fonksiyon,

$$y = S\log_a x = \left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_a = f_a(x) \quad (4)$$

olarak verilmiş olsun. Burada;

$a>0$, $a \neq 1$ olmak üzere logaritma tabanını, $x>0$ olarak logaritması alınacak olan sayıyı, $p = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere kök derecesini, K_a ise logaritma tabanına (a 'ya) bağlı bir reel sayıyı ifade etmektedir. (4) ile önerilen irrasyonel fonksiyondaki $\left[\sqrt[p]{x} - 1 \right]$ ifadesi logaritma fonksiyonu için $\forall a > 0$, $a \neq 1$ için $S\log_a x|_{x=1} = f_a(x)|_{x=1} = 0$ koşulunu sağlaması içindir. (4) ile önerilmiş olan irrasyonel fonksiyon logaritma fonksiyonunun temsili için önerilmiş olduğundan;

$$y = \log_a x \cong \left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_a = f_a(x) \quad (5)$$

olarak yazabiliriz.

$\log_a x$ fonksiyonunun tanımı gereği $\forall a, x > 0$, $a \neq 1$, ve $c > 0$, $c \neq 1$ olmak üzere (5) ifadesinden;

$$\begin{aligned} \log_a x &\cong \left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_a = f_a(x) \\ \log_c x &\cong \left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_c = f_c(x) \\ \log_c a &\cong \left[\sqrt[p]{a} - 1 \right] \cdot K_c = f_c(a) \end{aligned} \quad (6)$$

olarak yazılsın.

$\log_a x$ logaritma fonksiyonu için bilinen taban değiştirme özelliği ve (6) eşitlikleri de kullanılmak suretiyle;

$$\begin{aligned} \log_a x &= \frac{\log_c x}{\log_c a} \\ &= \frac{f_c(x)}{f_c(a)} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (6) ifade ile;

$$f_c(x) = \left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_c$$

ve

$$f_c(a) = \left[\sqrt[p]{a} - 1 \right] \cdot K_c$$

olarak verildiğinden;

$$\log_a x = \frac{f_c(x)}{f_c(a)} = \frac{\left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_c}{\left[\sqrt[p]{a} - 1 \right] \cdot K_c}$$

$$\log_a x = \frac{\left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_c}{\left[\sqrt[p]{a} - 1 \right] \cdot K_c}$$

$$\log_a x = \frac{\left[\sqrt[p]{x} - 1 \right]}{\left[\sqrt[p]{a} - 1 \right]}$$

$$\log_a x = \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[p]{a} - 1} \quad (7)$$

olarak bulunur. (5) ve (7) ifadeleri birlikte dikkate alınırsa K_a reel sayısı;

$$\left[\sqrt[p]{x} - 1 \right] \cdot K_a = \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[p]{a} - 1} \quad (8)$$

$$K_a = \frac{1}{\sqrt[p]{a} - 1} \quad (9)$$

olarak bulunur. ($K_a \in \mathbb{R}$; ($a > 0$, $a \neq 1$, $p = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$))

Dolayısıyla (4) ile önerilmiş olan irrasyonel fonksiyon;

$$S\log_a x = \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[p]{a} - 1} \quad (10)$$

olarak yazılabilecektir. ($\forall a, x > 0$, $a \neq 1$, $p = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$)

Bu durumda geriye (10) ifadesindeki $p = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ kök derecesinin belirlenmesi kalmaktadır. (4) ifadesiyle önerilen irrasyonel fonksiyon logaritma fonksiyonu yerine önerilmiş olduğundan $\forall a, x > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere,

$$\log_a x \cong S\log_a x \quad (11)$$

ifadesinin gerçekleşmesi gerekir. Bir başka deyişle

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow n} |\log_a x - S\log_a x| \\ \lim_{k \rightarrow n} \left| \log_a x - \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{\sqrt[k]{a} - 1} \right| \end{aligned} \quad (12)$$

ifadesinin limit değerinin sıfıra yaklaşması yani;

$$\lim_{k \rightarrow n} \left| \log_a x - \frac{\sqrt[k]{x} - 1}{\sqrt[k]{a} - 1} \right| \rightarrow 0 \quad (13)$$

olması gerekir.

Söz konusu limit işlemi için uygun algoritma ve nümerik yöntemler uygulandığında değişik $n \in \mathbb{Z}^+$ değerleri için (13) ifadesinin limit değerinin sıfır olduğu görülecektir. (4) ile önerilmiş olan $S\log_a x$ irrasyonel fonksiyonun $\log_a x$ fonksiyonu için temsili noktasında bir çalışma hedeflendiğinden $|\log_a x - S\log_a x|$ farkının olabildiğince en büyük hassasiyette sıfıra eşit olması elde edilen sonucun geçerliliği noktasında önem taşımaktadır. Bu nedenle n için elde edilen sayısal sonuçların elde

edilmesi aşamasında $|\text{Log}_a x - \text{SLog}_a x| < 10^{-7}$ olacak şekilde algoritma kurulmuş olup (13) ifadesindeki kök derecesine ilişkin olarak,

$$n = 30 \quad ; \quad p = 2^{30} \quad (14)$$

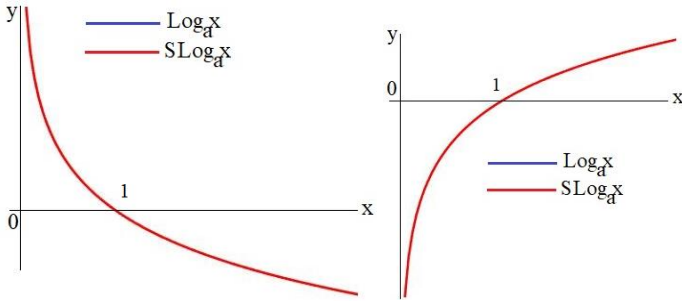
olarak bulunmuştur.

Böylece $\text{Log}_a x$ logaritma fonksiyonunun yerine (4) ile önerilen irrasyonel $\text{SLog}_a x$ fonksiyonu

$$\text{SLog}_a x = \frac{2^{30}\sqrt[30]{x} - 1}{2^{30}\sqrt[30]{a} - 1} \quad (15)$$

olarak yazılmış olmaktadır. ($\forall a, x > 0, a \neq 1$)

$\text{Log}_a x$ logaritma fonksiyonunun irrasyonel temsili için önerilen ve (15) ile elde edilen $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonunun grafiği ile $\text{Log}_a x$ logaritma fonksiyonunun grafiği Şekil 4. ve Şekil 5. ile birlikte verilmiştir.



Şekil 4. $x > 0, 0 < a < 1$ için $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ grafikleri Şekil 5. $x > 0, a > 1$ için $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ grafikleri

Şekil 4. ve Şekil 5. ile verilen grafiklerden görüleceği üzere irrasyonel $\text{SLog}_a x$ fonksiyonu ile $\text{Log}_a x$ fonksiyonu örtüşmekte, $x > 0$ için türevli ve sürekli olduğu görülmektedir.

2.1.2. Üstel fonksiyonun elde edilmesi

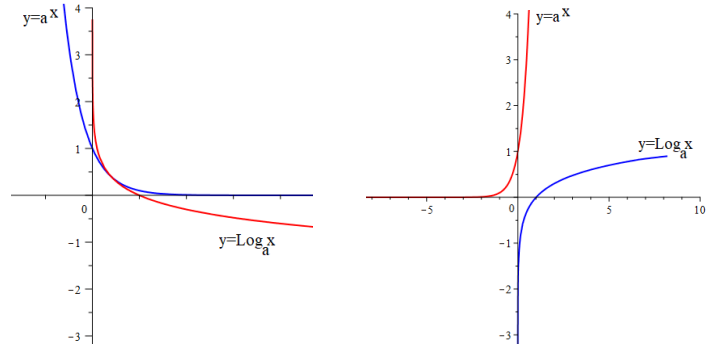
Matematikte üstel fonksiyon genel olarak logaritma fonksiyonun ters fonksiyonu olarak ifade edilmekte ve $\text{Log}_a x$ fonksiyonu için üstel fonksiyon ise;

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \text{ ve } a \in \mathbb{R}^+$$

olmak üzere;

$$y = a^x$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $y = a^x$ üstel fonksiyon ve $y = \text{Log}_a x$ logaritma fonksiyonlarının grafikleri ise;



Şekil 6. $0 < a < 1$ için logaritma ve üstel fonksiyon grafiği. Şekil 7. $a > 1$ için logaritma ve üstel fonksiyon grafiği.

şeklinde. Dolayısıyla (15) ile elde edilmiş olan $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonu için de matematikte ters fonksiyonların elde edilmesine dair bilinen işlemlerin yapılması suretiyle;

$y=f(x)$ için $x = f^{-1}(y)$ ters fonksiyonu olmak üzere;

$$\text{SLog}_a x = \frac{2^{30}\sqrt[30]{x} - 1}{2^{30}\sqrt[30]{a} - 1}$$

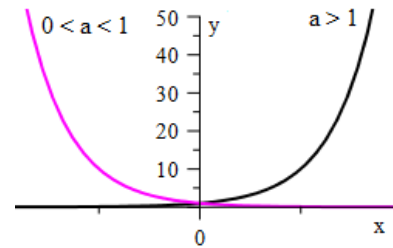
irrasyonel fonksiyonu için ters fonksiyonu (üstel fonksiyonu)

$$e\text{SLog}_a x = \left[x \cdot (2^{30}\sqrt[30]{a} - 1) + 1 \right]^{2^{30}} ; (x > 0, a > 0) \quad (16)$$

olarak yazılabilir. ($e\text{SLog}_a x$ notasyonu $\text{SLog}_a x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olarak kullanılmıştır.)

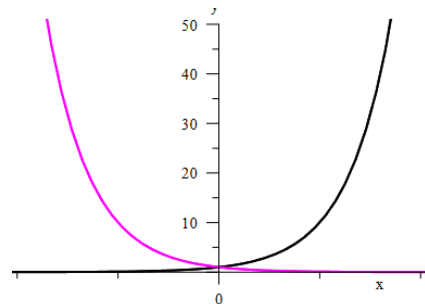
(16) ifadesi de $y = a^x$ üstel fonksiyonunu temsilen elde edilmiş olan üstel fonksiyon olduğundan (16) ifadesindeki a ve x sırasıyla üs alma işlemine ait taban ve üssü ifade etmektedir.

(16) ile ifade edilen $e\text{SLog}_a x = \left[x \cdot (2^{30}\sqrt[30]{a} - 1) + 1 \right]^{2^{30}}$ fonksiyonu için de grafikleri çizdirilecek olursa;



Şekil 8. $e\text{SLog}_a x$ üstel fonksiyonu grafiği.

Şekil 6.-Şekil 7 ($y = a^x$) ve Şekil 8. ($e\text{SLog}_a x$) üstel fonksiyon grafikleri birlikte çizdirilecek olursa;



Şekil 9.- Şekil 6.-Şekil 7. ve Şekil 8. grafikleri

3. Araştırma Sonuçları ve Tartışma

3.1. Sayısal sonuçların elde edilmesi

- Şekil 4. ve Şekil 5. ile logaritma fonksiyonu ($\text{Log}_a x$) ile önerilen irrasyonel fonksiyona ($\text{SLog}_a x$) ait grafikler birlikte verilmek suretiyle grafiklerin örtüşmüş olduğu, Tablo 1.-Tablo 4. ile her iki fonksiyon için de değişik taban ve sayı değerleri için logaritma değerleri uygun şekilde hesaplanarak her iki fonksiyon için hesaplanan değerler arasındaki farkın mutlak değeri (hata) son sütunda gösterilmiştir.

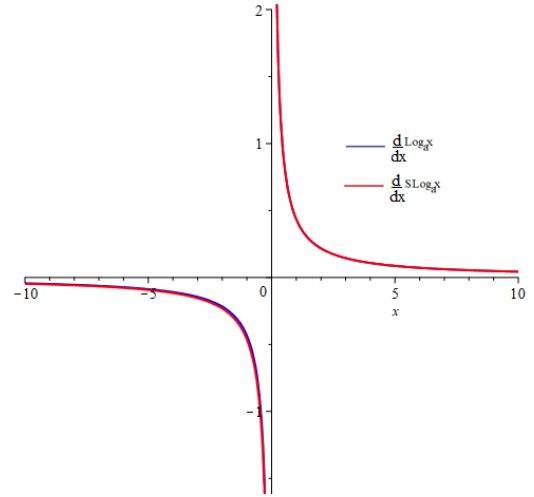
Tablo 1.-Tablo 4. değerlerinden görüleceği üzere x değeri arttıkça $|\text{Log}_a x - \text{SLog}_a x|$ değerinin yani hatanın (göreceli olarak) arttığı görülmekle birlikte oluşan hatanın $x = 10^{30}$ gibi mühendislik uygulamaları açısından çok büyük sayı değeri için bile çok küçük kaldığı görülmektedir (sırasıyla 5, 10, 50 ve 500 taban değerleri için $\leq 5.34 \times 10^{-7}$, $\leq 5.18 \times 10^{-7}$, $\leq 2.70 \times 10^{-7}$ ve $\leq 1.78 \times 10^{-7}$) Dolayısıyla mevcut mühendislik ve matematik uygulamaları açısından oluşan hata değeri herhangi bir sorun teşkil etmemektedir. Şekil 4. ve Şekil 5. ile verilen grafikler de bu hususu pekiştirmektedir.

Benzer olarak Tablo 1.-Tablo 4. değerlerinden aynı sayı (x) değerleri için taban değerleri arttıkça oluşan $|\text{Log}_a x - \text{SLog}_a x|$ hata değerinin de değiştiği görülmektedir. Ancak $x = 10^{30}$ gibi çok büyük sayı değeri dikkate alınacak olsa bile taban değeri arttıkça oluşan hatanın (her ne kadar hesaplamalarda taban ve sayı değerinden bağımsız olarak 10^{-7} mertebesinde gerçekleşiyor olsa bile) azaldığı görülmektedir ($x = 10^{30}$ değeri için 5 ve 500 tabanları için sırasıyla $\leq 5.34 \times 10^{-7}$ ve $\leq 1.78 \times 10^{-7}$)

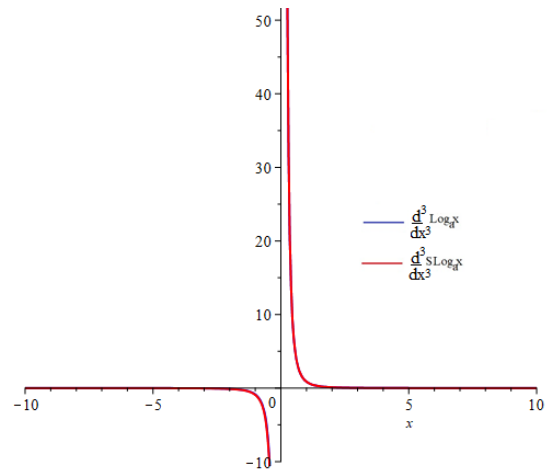
- $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonu elde edildikten sonra yine bilinen matematiksel tanım ve işlemler çerçevesinde bu fonksiyonun ters fonksiyonu oluşturulmak suretiyle $e\text{SLog}_a x = [x \cdot (x^{2^{30}\sqrt{a}} - 1) + 1]^{2^{30}}$ üstel fonksiyonu elde edilmiştir.

Bu fonksiyon için de $y = a^x$ üstel fonksiyonu ile birlikte analitik olarak grafiği oluşturulmuş ve Şekil 8. ile verilmiştir. Şekil 9. ile ise $y = a^x$ ve $e\text{SLog}_a x = [x \cdot (x^{2^{30}\sqrt{a}} - 1) + 1]^{2^{30}}$ fonksiyonunun grafikleri birlikte verilerek (16) ile elde edilen $e\text{SLog}_a x = [x \cdot (x^{2^{30}\sqrt{a}} - 1) + 1]^{2^{30}}$ fonksiyonunun da $y = a^x$ üstel fonksiyonun temsilinde kullanılabileceği gösterilmiştir. (Yer kaplamaması için üstel hesaplamalara ilişkin sayısal sonuçlar tablo olarak verilmemiştir.)

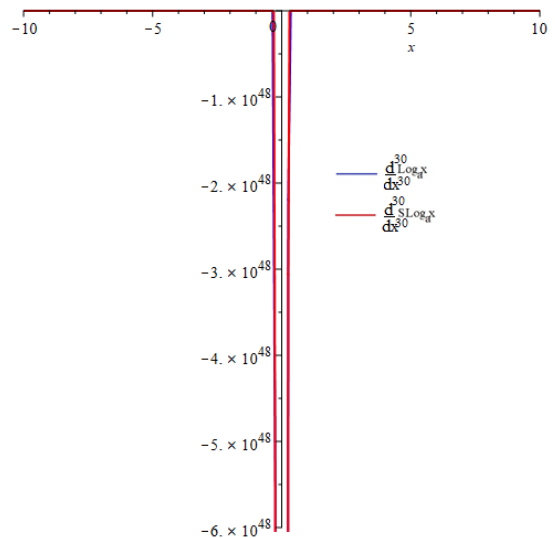
- Yukarıda belirtilen $|\text{Log}_a x - \text{SLog}_a x|$ mutlak farkın (hatanın) 10^{-7} mertebesinde kalması sadece $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonu için değil herhangi bir mertebeden türevi için de geçerlidir.



Şekil 10.- a=10 tabanı için $\frac{d(\text{Log}_a x)}{dx}$ ve $\frac{d(\text{SLog}_a x)}{dx}$ grafikleri



Şekil 11.- a=10 tabanı için $\frac{d^3(\text{Log}_a x)}{dx^3}$ ve $\frac{d^3(\text{SLog}_a x)}{dx^3}$ grafikleri



Şekil 12.- a=10 tabanı için $\frac{d^{30}(\text{Log}_a x)}{dx^{30}}$ ve $\frac{d^{30}(\text{SLog}_a x)}{dx^{30}}$ grafikleri

Şekil 10.-Şekil 11. ile $a=10$ taban değeri için türev mertebesi sırasıyla $n= 1, 3$ ve 30 alınarak $\frac{d^n (\text{Log}_a x)}{dx^n}$ ve $\frac{d^n (\text{SLog}_a x)}{dx^n}$ grafikleri bir arada verilmiştir.

- Bazı integral hesaplamalarının analitik olarak yapılması noktasında $\text{SLog}_a x$ fonksiyonunun kullanılması bazı kolaylıklar sağlayabilir. Örneğin:

$I = \int (\text{Lnx})^2 dx$ belirsiz integralinin ilkelini analitik olarak bulabilmek için ardışık olarak iki kez kısmi integrasyon metodunu uygulamak gerekir.

$$u = (\text{Lnx})^2 \quad dv = dx$$

$$du = 2.\text{Lnx}.\frac{1}{x}.dx \quad ; \quad v = x$$

$$I = x.(\text{Lnx})^2 - \int x.\left(2.\text{Lnx}.\frac{1}{x}.dx\right)$$

$$I = x.(\text{Lnx})^2 - 2 \int \text{Lnx}.dx$$

olarak tekrar kısmi integrasyon metodunun uygulanması suretiyle;

$$I = x.(\text{Lnx})^2 - 2 \left[x.\text{Lnx} - \int x.\left(\frac{1}{x}.dx\right) \right]$$

$$I = x.(\text{Lnx})^2 - 2 \left[x.\text{Lnx} - \int dx \right]$$

$$I = x.(\text{Lnx})^2 - 2 \left[x.\text{Lnx} - x + C \right]$$

$$I = x.(\text{Lnx})^2 - 2x(\text{Lnx}-1) + C_1 \quad ; \quad C_1 = -2C$$

olarak bulunmuş olurdu. Eğer $\text{SLog}_a x$ fonksiyonu ile integrasyon işlemi yapılmış olsaydı;

$$I = \int \left(\frac{x^n - 1}{a^n - 1} \right)^2 .dx = \frac{1}{(a^n - 1)^2} \int (x^n - 1)^2 .dx \quad ; \quad n = \frac{1}{2^{30}}$$

$$I = \frac{1}{(a^n - 1)^2} \int (x^{2n} - 2.x^n + 1).dx$$

$$I = \frac{1}{(a^n - 1)^2} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 2.\frac{x^{n+1}}{n+1} + x \right) + C_2 \quad ; \quad n = \frac{1}{2^{30}}$$

şeklinde elde edilmiş olurdu. Yukarıda verilen örnek uygulamadan da görüleceği üzere bu tür integrallerin analitik çözümlerine ilişkin olarak $\text{SLog}_a x$ fonksiyonunu kullanmak gerek zaman gerekse işlem açısından avantaj sağlamaktadır. Bu avantaj $\int x^p.(\text{Lnx})^q .dx$ ($p, q \in \mathbb{Z}^+$) tarzında integrallerin çözümünde daha da artmaktadır.

- Değişik taban ve sayı değerleri için $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ fonksiyonları için hesaplanan değerler ve $|\text{Log}_a x - \text{SLog}_a x|$ değeri (hata) Tablo 1.-Tablo 4. ile verilmiştir.

Tablo 1. $a=5$ tabanı için hesaplanan $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ değerleri ve mutlak fark (hata)

x	$\text{Log}_5 x$	$\text{SLog}_5 x$	$ \text{Log}_5 x - \text{SLog}_5 x $
1	0,000000000	0,000000000	0,000000000
5	1,000000000	1,000000000	0,000000000
10	1,430676558	1,430676551	0,000000007
50	2,430676558	2,430676551	0,000000007
100	2,861353116	2,861353102	0,000000014
500	3,861353116	3,861353102	0,000000014
1.000	4,292029674	4,292029653	0,000000021
5.000	5,292029674	5,292029653	0,000000021
10.000	5,722706232	5,722706204	0,000000028
50.000	6,722706232	6,722706204	0,000000028
100.000	7,153382790	7,153382756	0,000000034
500.000	8,153382790	8,153382756	0,000000034
1.000.000	8,584059348	8,584059307	0,000000041
5.000.000	9,584059348	9,584059307	0,000000041
10.000.000	10,014735906	10,014735858	0,000000048
50.000.000	11,014735906	11,014735858	0,000000048
100.000.000	11,445412464	11,445412409	0,000000055
500.000.000	12,445412464	12,445412409	0,000000055
1.000.000.000	12,876089022	12,876088960	0,000000062
5.000.000.000	13,876089022	13,876088960	0,000000062
10.000.000.000	14,306765580	14,306765512	0,000000068
50.000.000.000	15,306765580	15,306765512	0,000000068
100.000.000.000	15,737442138	15,737442063	0,000000075
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
10*30	42,92029674	42,920297276	0,000000534

Tablo 2. $a=10$ tabanı için hesaplanan $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ değerleri ve mutlak fark (hata)

x	$\text{Log}_{10} x$	$\text{SLog}_{10} x$	$ \text{Log}_{10} x - \text{SLog}_{10} x $
1	0,000000000	0,000000000	0,000000000
5	0,698970004	0,698970008	0,000000004
10	1,000000000	1,000000000	0,000000000
50	1,698970004	1,698970008	0,000000004
100	2,000000000	2,000000000	0,000000000
500	2,698970004	2,698970008	0,000000004
1.000	3,000000000	3,000000000	0,000000000
5.000	3,698970004	3,698970008	0,000000004
10.000	4,000000000	4,000000000	0,000000000
50.000	4,698970004	4,698970008	0,000000004
100.000	5,000000000	5,000000000	0,000000000
500.000	5,698970004	5,698970008	0,000000004
1.000.000	6,000000000	6,000000000	0,000000000
5.000.000	6,698970004	6,698970008	0,000000004
10.000.000	7,000000000	7,000000000	0,000000000
50.000.000	7,698970004	7,698970008	0,000000004
100.000.000	8,000000000	8,000000000	0,000000000
500.000.000	8,698970004	8,698970008	0,000000004
1.000.000.000	9,000000000	9,000000000	0,000000000
5.000.000.000	9,698970004	9,698970008	0,000000004
10.000.000.000	10,000000000	10,000000000	0,000000000
50.000.000.000	10,698970004	10,698970008	0,000000004
100.000.000.000	11,000000000	11,000000000	0,000000000
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
10*30	30,000000000	30,000000518	0,000000518

Tablo 3. a=50 tabanı için hesaplanan $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ değerleri ve mutlak fark (hata)

x	$\text{Log}_{50} x$	$\text{SLog}_{50} x$	$ \text{Log}_{50} x - \text{SLog}_{50} x $
1	0,000000000	0,000000000	0,000000000
5	0,411408090	0,411408091	0,000000001
10	0,588591910	0,588591909	0,000000001
50	1,000000000	1,000000000	0,000000000
100	1,177183820	1,177183818	0,000000002
500	1,588591910	1,588591909	0,000000001
1.000	1,765775730	1,765775727	0,000000003
5.000	2,177183820	2,177183810	0,000000010
10.000	2,354367640	2,354367636	0,000000004
50.000	2,765775730	2,765775727	0,000000003
100.000	2,942959550	2,942959545	0,000000005
500.000	3,354367640	3,354367636	0,000000004
1.000.000	3,531551460	3,531551453	0,000000007
5.000.000	3,942959550	3,942959545	0,000000005
10.000.000	4,120143370	4,120143362	0,000000008
50.000.000	4,531551460	4,531551453	0,000000007
100.000.000	4,708735281	4,708735271	0,000000010
500.000.000	5,120143370	5,120143362	0,000000008
1.000.000.000	5,297327191	5,297327180	0,000000011
5.000.000.000	5,708735281	5,708735271	0,000000010
10.000.000.000	5,885919101	5,885919089	0,000000012
50.000.000.000	6,297327191	6,297327180	0,000000011
100.000.000.000	6,474511011	6,474510998	0,000000013
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
10^30	17,6577573	17,657757572	0,000000270

Tablo 4. a=500 tabanı için hesaplanan $\text{Log}_a x$ ve $\text{SLog}_a x$ değerleri ve mutlak fark (hata)

x	$\text{Log}_{500} x$	$\text{SLog}_{500} x$	$ \text{Log}_{500} x - \text{SLog}_{500} x $
1	0,000000000	0,000000000	0,000000000
5	0,258976574	0,258976575	0,000000001
10	0,370511713	0,370511713	0,000000000
50	0,629488287	0,629488287	0,000000000
100	0,741023426	0,741023425	0,000000001
500	1,000000000	1,000000000	0,000000000
1.000	1,111535139	1,111535138	0,000000001
5.000	1,370511713	1,370511713	0,000000000
10.000	1,482046853	1,482046851	0,000000002
50.000	1,741023426	1,741023425	0,000000001
100.000	1,852558566	1,852558563	0,000000003
500.000	2,111535139	2,111535138	0,000000001
1.000.000	2,223070279	2,223070276	0,000000003
5.000.000	2,482046853	2,482046851	0,000000002
10.000.000	2,593581992	2,593581989	0,000000003
50.000.000	2,852558566	2,852558563	0,000000003
100.000.000	2,964093705	2,964093701	0,000000004
500.000.000	3,223070279	3,223070276	0,000000003
1.000.000.000	3,334605418	3,334605414	0,000000004
5.000.000.000	3,593581992	3,593581989	0,000000003
10.000.000.000	3,705117131	3,705117127	0,000000004
50.000.000.000	3,964093705	3,964093701	0,000000004
100.000.000.000	4,075628844	4,075628839	0,000000005
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
10^30	11,11535139	11,115351572	0,000000178

4. Sonuç

- Bu çalışmada logaritma hesabı için kullanılan $\text{Log}_a x$ fonksiyonunun irrasyonel bir fonksiyon ile temsil edilebileceği

amaçlanarak $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonu önerilmiş ve elde edilmiştir. Şekil 4., Şekil 5. grafikleri ve Tablo 1.-Tablo 4. sayısal sonuçlarından $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonunun matematik, mühendislik ve diğer bilim dallarında yaygın kullanımı olan $\text{Log}_a x$ fonksiyonu ile aynı işleve sahip olduğu gösterilmiş, her iki fonksiyon için de bulunan değerler arasında oluşan mutlak farkın (hatanın) seçilen taban (a) ve sayı değerlerinden (x) bağımsız olmak üzere

$$|\text{Log}_a x - \text{SLog}_a x| < 10^{-7}$$

olarak gerçekleştiği, $\text{SLog}_a x$ irrasyonel fonksiyonunun $\text{Log}_a x$ fonksiyonunun temsilinde kullanılabileceği, $\text{Log}_a x$ fonksiyonunun kendisi (veya üslü ifadeleri) dikkate alındığında bazı durumlarda analitik olarak integral alma işlemlerini $\text{SLog}_a x$ ile yapmanın avantaj sağlayacağı gösterilmiştir.

- Bu çalışmada önerilmiş ve elde edilmiş olan $\text{SLog}_a x$ ve $e\text{SLog}_a x$ fonksiyonları ile $\text{Log}_a x$ ve $y = a^x$ fonksiyonları için hesaplanan değerler arasındaki fark (hata), mühendislik ve matematik uygulamaları açısından sorun teşkil etmeyecek derecede çok küçük ($< 10^{-7}$) kalmakta, gerçek değerler ile gelişmemektedir.

- Bu çalışmanın amacı, temelde $\text{Log}_a x$ fonksiyonunun irrasyonel $\text{SLog}_a x$ fonksiyonu ile temsil edilmesine yönelik olduğundan başlangıç olarak $\text{Log}_a x$ fonksiyonu ile yapılan logaritma hesaplarının, grafiklerin elde edilmesi ve özellikle $\text{Log}_a x$ ihtiva eden, analitik olarak çözülmesi zaman alan ve çok işlem gerektiren integrallerin alınmasının daha kolay bir şekilde yapılabilmesi hedeflenmiş ve $\text{SLog}_a x$ fonksiyonu ile bazı integrallerin analitik olarak daha kolay çözülebileceği gösterilmiştir.

- Ancak bu çalışmada esas olarak $\text{Log}_a x$ ve $y = a^x$ fonksiyonlarının temsiline ilişkin olarak $\text{SLog}_a x$ ve $e\text{SLog}_a x$ fonksiyonlarının elde edilmesi hedeflendiğinden $\text{SLog}_a x$ ve $e\text{SLog}_a x$ fonksiyonlarının analitik olarak incelenmeleri, seri açılımları ve bu doğrultuda $\text{Log}_a x$ fonksiyonu ile olan yakınsaklık durumlarının irdelenmesi, $\text{Log}_a x$ ve $y = a^x$ fonksiyonlarını içeren adi veya kısmi diferansiyel denklemlere benzer olarak aynı çalışmaların $\text{SLog}_a x$ ve $e\text{SLog}_a x$ fonksiyonları için de yapılması, gerekli çıkarımların, olası sınırlılıkların belirlenmesi, kompleks sayıların logaritmasının hesaplanması bu çalışmada yapılmayan fakat bu çalışmanın devamı olarak yapılması düşünülen başlıklar olarak sayılabilir.

- Bütün bu hususlar dahilinde $\text{SLog}_a x$ ve $e\text{SLog}_a x$ ile önerilen fonksiyonların bu çalışma ile ilk kez önerilmiş ve elde edilmiş olmaları, matematiğin en temel tanım, kavram ve fonksiyonları için bile süreç içerisinde yeni öneri, yöntem ve yorumların yapılabileceği fikrini desteklemesi açısından önemlidir.

Kaynakça

- Aleksandrov, A. G., (2014). Residues of Logarithmic Differential Forms in Complex Analysis and Geometry, *Analysis in Theory and Applications*, Vol. 30, No. 1, 34-50.
- Andrews G. E., Askey R., Roy R. (1999). Special Functions, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 71, Cambridge University Press
- Boyer, C. B. and Merzbach, U. C. (1991). Invention of Logarithms., *A History of Mathematics*, 2nd ed. New York: Wiley, 312-313.
- Bruce, I., (2000), Napier's logarithms., *American Journal of Physics*, 68(2):148–154
- Fauvel, J., (2000). John Napier 1550–1617. EMS Newsletter, 38:24–25, (Reprinted pp. 1, 6–8 of *CMS Notes-Notes de la SMC*, volume 33, issue 6, October 2001)
- Gautschi, W. (2008). On Euler's attempt to compute logarithms by interpolation: A commentary to his letter of February 16, 1734 to Daniel Bernoulli, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 219, no.2, 408-415.
- Havil, J. (2003). The Baron's Wonderful Canon., 1.2 in Gamma: Exploring Euler's Constant. *Princeton, NJ: Princeton University Press*, 4-11.
- Kathleen, M., Montelle, C., (2015). Logarithms: The Early History of a Familiar Function - John Napier Introduces Logarithms, *Mathematical Association of America*.
- Kreyszig E. (1993). Advanced Engineering Mathematics, *John Wiley & Sons*, 7th Edition.
- Matala-Aho T., Vaananen Keijo, Zudilin Wadim. (2005). New Irrationality Measures for q-Logarithms, *Mathematics of Computation*, v. 75, Number 254, 879-889.
- Mathews J. H. (1992). Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, *Prentice-Hall Inc.*, 2nd Ed.
- Koelink, E., Assche, W. V. (2009). Leonhard Euler and a q-analogue of the logarithm. , *American Mathematical Society*, v.137, n.5, 1663-1676.
- Nofal, C. P. (2006) Proof that the Natural Logarithm Can Be Represented by the Gaussian Hypergeometric Function.
- Pol D., (2018), On the values of logarithmic residues along curves, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 68, 2, 725-766.
- Rice B., Gonzales-Velasco E., Corrigan A. (2017). John Napier. In The Life and Works of John Napier, *Springer*.
- Tajima. S., Nabeshima, K., (2021). Computing Regular Meromorphic Differential Forms via Saito's Logarithmic Residues, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, *Sigma* 17.
- Thomas, G. B., Maurice D. W., Joel H. R. (2010). Thomas' Calculus, 12th Edition, *Pearson*.