

PAPER DETAILS

TITLE: Alan koruyan projeksiyonlar her zaman alan korur mu?

AUTHORS: Ibrahim Öztug BILDIRICI

PAGES: 306-311

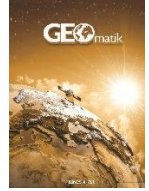
ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/2889943>



Geomatik

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/geomatik>

e-ISSN 2564-6761



Alan koruyan projeksiyonlar her zaman alan korur mu?

İbrahim Öztuğ Bildirici*¹

¹Konya Teknik Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Konya, Türkiye

Anahtar Kelimeler

Harita projeksiyonları
Alan koruyan projeksiyon
Küresel üçgen

Araştırma Makalesi

Geliş: 13.01.2023
Revize: 09.04.2023
Kabul: 13.04.2023
Yayınlanma: 19.04.2023



Öz

Harita projeksiyonları alan, açı ve uzunluk koruma özelliği sağlayacak şekilde geliştirilebilir. Uzunluk koruma belli bir yönde, açı koruma ise diferansiyel anlamda olmasına karşın alan koruma hem diferansiyel hem de sonlu büyüklükler için geçerlidir. Ancak meridyen ve paraleller ile sınırlanmış bölgeler dışında sonlu büyüklüklerdeki şekillerin alanları tam olarak korunmaz. Bunun nedeni kürede şekli sınırlayan büyük daire yayları ile düzlemdeki doğru parçalarının birbirinin izdüşümü olmamasıdır. Bu etki şekli oluşturan büyük daire yayları belli bir büyüklüğü aşınca ortaya çıkar. Bu makalede bir nokta etrafında tanımlanan değişken boyutlu eşkenar küresel üçgenler yardımıyla alan hataları seçilen 4 projeksiyon için düzenli aralıklarla tanımlanmış bir nokta kümesi için analiz edilmiştir. Alan hatası küresel üçgen boyutuna ve konumuna bağlı değişmektedir. Seçilen projeksiyonlar için alan hatalarının hangi aralıklarla nokta sıklaştırması yapılarak küçültülebileceği ortaya konmuştur. Alan hatası bakımından en duyarlı projeksiyonun alan koruyan silindirik projeksiyon olduğu görülmüştür.

Do equal-area projections really preserve areas?

Keywords

Map projections
Equal-area projections
Spherical triangle

Research Article

Received:13.01.2023
Revised: 09.04.2023
Accepted: 13.04.2023
Published:19.04.2023

Abstract

Map projections can be developed to preserve areas, angles, and lengths. Although the lengths are preserved in a certain direction, and the angle preserving is valid for differential quantities, the equal-area property is valid for both the differential and the finite quantities. However, areas of finite shapes are not exact in the projection plane except for regions bounded by meridians and parallels. The reason for this is that the great circle arcs that constitute the shape of the sphere and the line segments in the plane are not coincident. This effect is significant when a certain length of great circles that belong to a shape is exceeded. In this article, using variable-sized equilateral spherical triangles defined around a point, area errors are analyzed for a set of points defined at regular intervals for four selected projections. The area error varies depending on the size and position of the spherical triangle. For the selected projections, it has been shown at which intervals of point densification the area errors can be reduced. It was seen that the most sensitive projection in terms of area error was the equal-area cylindrical projection.

1. Giriş

Harita projeksiyonları ile ilgili tüm hesaplamaların yazılımlar tarafından çözüldüğü gibi yaygın bir düşünce olmasına rağmen bu durum tam olarak doğru değildir. Bilişim teknolojilerindeki tüm gelişmelere rağmen yazılım kullananların dikkat etmesi gereken hususlar vardır.

Harita projeksiyonlarında deformasyon ya da diferansiyel ölçek, projeksiyon düzlemindeki sonsuz küçük bir uzunluğun buna karşılık gelen orijinal yüzeydeki (küre ya da elipsoit) sonsuz küçük uzunluğa oranıdır. Diferansiyel anlamda deformasyonun sonlu büyüklükler anlamında deformasyon ile aynı olmadığı gerçeği genel olarak dikkat edilmeyen bir husustur.

Alan koruma hem sonlu hem de sonsuz küçük büyüklükler için geçerlidir. Ancak parametre eğrileri ile sınırlanan, küre kapağı, küre kuşağı ve pafta alanı gibi şekiller dışında alan koruma tam olarak sağlanmaz. Alan koruyan projeksiyonlarda büyük daire yaylarının izdüşümleri doğru parçası değildir. Bu nedenle büyük daire yayları ile sınırlanan alanlar korunamaz. Bu etki, alanı oluşturan büyük daire yaylarının uzunluğu arttıkça belirginleşir. Dolayısı ile herhangi bir şeklin küredeki alanını bulmak için alan koruyan projeksiyona geçip düzlemdeki alandan yararlanmak teorik olarak doğru değildir. Pratikte kenarları 100 km üzeri olan şekillerde belirgin alan hataları ile karşılaşılır. Burada söz konusu olan hatalar istatistik bakımından sistematik hatadır. Problem, büyük daire yayları üzerinde ilave noktalar ekleyip, bu şekilde düzlemde alan hesabı yapılarak çözülebilir. Burada hangi büyüklükteki şekillerde ve hangi sıklıkta ilave noktalar oluşturulmalı sorusu ortaya çıkar. Bu makalede bu soruların cevabı aranmaktadır.

Bu çalışmada konu vektör veriler bakımından ele alınmıştır. Alan koruyan projeksiyonlarda alan hatası konusu raster veriler için de önemlidir. Bu konuyu ele alan önemli kaynaklardan biri [Usery ve Seong, \(2011\)](#) olarak sayılabilir. Makale, bilimsel bir dille, farklı disiplinlerdeki ispata dayalı bilgiler ve mantıksal tartışmaların birleştirilmesi ile oluşan fikirleri içeren ve makalenin temel amaç ve yaklaşımlarını ifade eden bir giriş bölümü ile başlamalıdır. Bu bölüm tüm okuyucular dikkate alınarak yazılmalıdır. Teknik terimler, semboller ve kısaltmalar makalede ilk kullanıldıklarında tanımlanmalıdır.

1.1. Notasyon

α	Azimet
δ	Büyük daire yay uzunluğu
ε	Küresel eksen
φ, λ	Enlem, boylam
φ_1, φ_2	Standart paraleller
θ	Yardımcı parametre (Gerçek anlamda olmayan silindirik projeksiyonlarda)
a, b	Maksimum ve minimum uzunluk deformasyonları (diferansiyel)
M	Projeksiyon düzleminde kutupsal koordinat, bir noktadan geçen paralel dairenin projeksiyonda yarıçapı
N	Konik projeksiyonlarda küçültme faktörü
R	Küre yarıçapı
x, y	Projeksiyon düzleminde Kartezyen koordinatlar, x sağa, y, yukarı

2. Materyal ve Method

Harita projeksiyonları, x, y düzlem, φ, λ coğrafi (enlem, boylam) koordinatları göstermek üzere, [Eşitlik 1](#)'deki fonksiyon çifti ile tanımlanır. Bu tanımlamanın bir harita projeksiyonu olması için, [Eşitlik 2](#)'deki eşitsizliği sağlanmalıdır ([Canters, 2002](#); [Bildirici, 2023](#)).

$$x = x(\varphi, \lambda) y = y(\varphi, \lambda) \quad (1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \neq 0 \quad (2)$$

Projeksiyonların deformasyon özellikleri Tissot endikatrısı ile incelenir. Tissot bir yüzeyden bir yüzeye dönüşümün diferansiyel anlamda bir afin dönüşüm olduğunu göstermiştir ([Canters, 2002](#)). Bu bakış açısıyla orijinal yüzeyde (küre ya da elipsoit) bir nokta etrafında çizilen sonsuz küçük bir dairenin izdüşümü incelenir. Kürede daireyi çizdiren vektörün izdüşümü düzlemde bir elips çizdirir. Bu elipse Tissot Endikatrısı denir. Daire ve elips alanı diferansiyel anlamda eşit alınarak alan koruyan projeksiyonlar geliştirilir. Her yönde uzunluk deformasyonunun aynı olması varsayımı ile de açı koruyan ya da konform projeksiyonlar elde edilir. Uzunluk koruma ise genel olarak meridyen uzunluğunun korunması anlamındadır ([Bildirici, 2023](#)).

Tissot endikatrısının büyük yarıçapı (a) bir nokta etrafında oluşan en büyük deformasyonu, küçük yarıçapı ise en küçük deformasyonu (b) ifade eder. Alan koruma şartı, orijinal yüzeyde yarıçapı 1 birim kabul edilen sonsuz küçük dairenin alanının düzlemde bunun izdüşümü olan elipsin alanına eşit olmasıdır. Bu, alan koruyan projeksiyonların çıkış noktasıdır ([Eşitlik 3](#)).

$$ab = 1 \quad (3)$$

Bu çalışmada kartografya ve harita projeksiyonları üzerine daha ayrıntılı bir tartışma verilmeyecek olup, bu konuda ilgili kaynaklardan yararlanılabilir ([Bildirici, 2023](#); [Bildirici, 2019](#), [Bildirici, 2017](#); [Bildirici, 2016](#); [Bugayevskiy ve Snyder, 1995](#); [Hüsrevoğlu ve Tuşat, 2018](#); [Koçak, 1999](#); [Snyder, 1993](#); [Snyder, 1987](#); [Uçar ve ark., 2011](#); [Varol ve Şanlıoğlu, 2017](#)).

Alan koruyan projeksiyonlara özgü önemli ve güncel araştırmalardan biri de [Strebe \(2017\)](#)'dir. Bu çalışmada parametrelere bağlı olarak sürekli değişen ancak alan koruma özelliğini kaybetmeyen bir projeksiyon yöntemi önerilmiştir. [Canters \(2002\)](#) ise sonlu ve sonsuz küçük büyüklüklerin deformasyonlarının farklı olduğunu kapsamlı bir şekilde ele alan önemli kaynaklardan biridir.

2.1. Ele Alınan Projeksiyonlar

Bu çalışmada farklı özelliklere sahip 4 değişik alan koruyan projeksiyon ele alınacaktır.

1- Alan koruyan azimutal projeksiyon (AKA) ([Eşitlik 4](#))

$$\begin{aligned} m &= 2R \sin \frac{\delta}{2} \\ x &= m \sin \lambda \\ y &= -m \cos \lambda \end{aligned} \quad (4)$$

2- Alan koruyan silindirik (AKS) (Eşitlik 5)

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi_1 \\ y &= R \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_1} \end{aligned} \quad (5)$$

3- Alan koruyan konik (AKK) (Eşitlik 6)

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{2} \\ m &= \frac{R}{n} \sqrt{\cos^2 \varphi_1 + 2n(\sin \varphi_1 - \sin \varphi)} \\ x &= m \sin \lambda \\ y &= m_0 - m \cos \lambda \end{aligned} \quad (6)$$

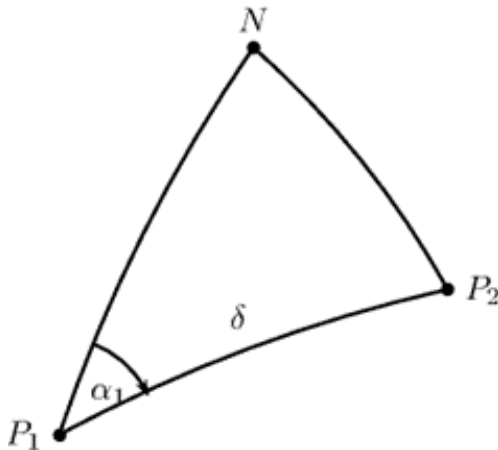
4- Mollweide projeksiyonu (MP) (Eşitlik 7)

$$\begin{aligned} x &= R \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \lambda \cos \theta \\ y &= R \sqrt{2} \sin \theta \\ 2\theta + \sin 2\theta &= \pi \sin \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

2.2. Küre Geometrisi

Küre yüzeyinde parametre eğrileri ile sınırlanmayan en temel şekil küresel üçgendir. Bu çalışmada da değişik enlemlerde tanımlanan küresel üçgenlerin alanlarındaki değişim ele alınacağından burada kısa bir küre geometrisi ve küresel trigonometri bilgisi verilecektir.

Büyük daire yayı, küre üzerinde en kısa yol olup, düzlem üçgenlerin doğru parçalarından oluşmasına benzer olarak, küresel üçgenler de büyük daire yaylarından oluşur. Bu bağlamda küresel üçgen, küre yüzeyinde 3 noktanın büyük daire yayları ile bağlanması ile oluşan şekildir. Küresel üçgen elemanlarının hesaplaması ile uğraşan matematik dalına küresel trigonometri denir. Küresel trigonometri konusunda ayrıntılı bilgi için Ayres (1954) ve Ulsoy (1969) gibi kaynaklardan yararlanılabilir.



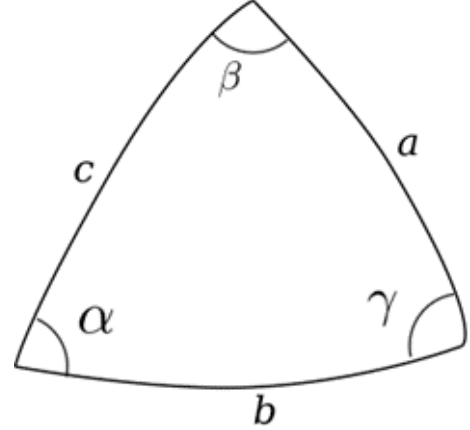
Şekil 1. Kürede temel ödevler

İki nokta arasındaki büyük daire yayının uzunluğu ve birinci noktadaki azimutu, Eşitlik 8 ve 9'daki bağıntılarından (ikinci temel ödev) hesaplanır (Şekil 1).

$$\cos \delta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (8)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \varphi_1 \tan \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (9)$$

Burada δ , büyük daire yayını küre merkezinde gören açı olup, küre yarıçapı ile çarpılarak (radyan biriminde!) küredeki uzaklığa geçilebilir ($\hat{\delta} = R\delta$).



Şekil 2. Küresel üçgen

Bir noktadan belli bir azimut doğrultusunda $\hat{\delta}$ kadar uzaklıktaki noktanın coğrafi koordinatları ise, Eşitlik 10 ve 11'deki bağıntılarından hesaplanır (birinci temel ödev).

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \frac{\hat{\delta}}{R} + \cos \varphi_1 \sin \frac{\hat{\delta}}{R} \cos \alpha_1 \quad (10)$$

$$\tan(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\sin \alpha_1}{\frac{\cos \varphi_1}{\tan \frac{\hat{\delta}}{R}} - \sin \varphi_1 \cos \alpha_1} \quad (11)$$

Büyük daire yayı üzerinde ara noktalar birinci temel ödev bağıntıları ile hesaplanır.

Küresel üçgenin iç açıları toplamı $\pi + \varepsilon$ kadar olup, ε küresel eksis olarak adlandırılır. İç açılardan ya da kenarlardan hesaplanır (Eşitlik 12) (Şekil 2).

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a + b + c) \\ \tan \frac{\varepsilon}{4} &= \sqrt{\tan \frac{s}{2R} \tan \frac{s-a}{2R} \tan \frac{s-b}{2R} \tan \frac{s-c}{2R}} \\ \varepsilon &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \end{aligned} \quad (12)$$

Küresel üçgen elemanlarının hesaplamaları (Şekil 2) küresel sinüs ve kosinüs bağıntıları ile yapılır. Bağıntılar için Bildirici (2023, s.31)'den yararlanılabilir.

Küresel eksis ve üçgen alanı ilişkilidir (Eşitlik 13).

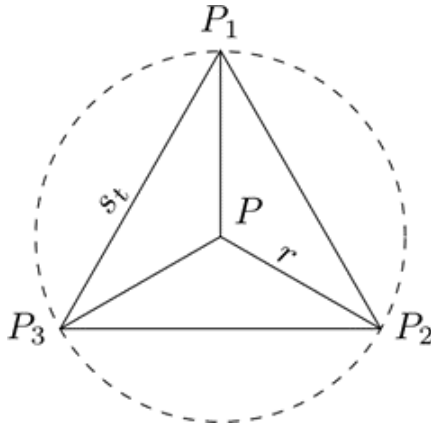
$$F = \frac{\varepsilon}{R^2} \quad (13)$$

Küresel çokgenlerin alanları ise toplam iç açıya karşılık gelen toplam eksen yardımıyla hesaplanabilir. θ iç açılar toplamını, n çokgen köşe sayısını göstermek üzere çokgen alanı, Eşitlik 14 bağıntısı ile bulunur. İç açılar ikinci temel ödev bağıntılarından Eşitlik (9) hesaplanacak azimut farklarından bulunabilir.

$$F = (\theta - (n - 2)\pi)R^2 \quad (14)$$

3. Tartışma

Alan hatalarını incelemek için bir nokta etrafında r yarıçaplı daire içine çizilen eşkenar küresel üçgenden yararlanılmıştır. Test üçgeni olarak adlandırılan bu üçgen, araştırma noktasından r uzaklığında, 0° , 120° ve 240° azimutlarında üç nokta ile oluşturulmaktadır (Şekil 3). Alan hataları küresel test üçgeni ve bunun projeksiyondaki karşılığı düzlem üçgen arasındaki farklar ile incelenecektir.



Şekil 3. Test üçgeni

Alan hatasını görmek için AKS projeksiyonunda bir nokta seçerek test üçgeni ve izdüşümünü oluşturalım. P noktasının enlemi 45° , boylamı 10° ve $r=100$ km olsun. Eşitlik (10) ve (11)'den Şekil 3'te de görülen P_1, P_2, P_3 noktalarının coğrafi koordinatları ve Eşitlik (5) ile hesaplanan projeksiyon koordinatları Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1. Örnek hesaplama ($\varphi_p = 45^\circ, \lambda_p = 10^\circ, R = 6371$ km)

Nokta	φ°	λ°	x (km)	y (km)
P_1	45.899322	10.000000	770.103	4710.649
P_2	44.545101	11.092819	876.494	4573.928
P_3	44.545101	8.907181	704.765	4550.203

Buradaki küresel üçgen eksen değeri 0.000321 radyan, alanı 12991.315 km²'dir. Düzlem üçgen alanı 12988.191 km² olup, 3.124 km² eksiktir. Küresel üçgen kenarlarına 10 km aralıklarla noktalar eklenirse, düzlem alan 12990.977 km² olur. Aradaki fark 0.338 km²ye düşer.

Bu örnek hesaplama bir projeksiyon ve bir nokta için yapılmıştır. Noktanın konumuna ve seçilen projeksiyona göre farklar değişecektir.

Alan hatası bakımından iki araştırma sorusu düşünülebilir.

1. Hangi alan büyüklüğünden itibaren alan hatası belirgin duruma gelmektedir?

2. Alan hatasını azaltmak için hangi aralıklarla sıklaştırma yapılmalıdır?

Küçük ölçekli harita çalışmaları için alan hatasının 1 km² altında olması göz ardı edilebilir bir değer olarak varsayılabilir. Bu ölçüte göre analiz yapılabilir.

Seçilen 4 projeksiyonda küre üzerine düzenli dağılmış bir nokta kümesinde test üçgenleri oluşturulup ortalama alan hatası değerlerinin hesaplanması ile araştırma sorularının cevapları bulunabilir.

Seçilen 3 projeksiyonda deformasyon enleme bağlı olduğundan test noktaları sabit bir boylamda $10^\circ \leq \varphi \leq 80^\circ$ aralığında $\Delta\varphi = 10^\circ$ artış ile 8 nokta, Mollweide projeksiyonu için ise $10^\circ \leq \varphi \leq 80^\circ, 10^\circ \leq \lambda \leq 170^\circ$ aralığında $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ artışla seçilen 136 noktadan oluşmaktadır.

Bu çalışma kapsamında tüm hesaplamalarda küre yarıçapı 6371 km alınmıştır.

Test nokta kümesi üzerinde test üçgenleri ile yapılan hesaplamalar bu çalışma kapsamında Python dili ile yazar tarafından geliştirilen kodlarla gerçekleştirilmiştir.

3.1. Alan Büyüklüğü Alan Hatası İlişkisi Analizi

Test nokta kümesinde her bir nokta için test üçgenleri oluşturularak bu üçgenler bakımından oluşan alan deformasyonu ve alan farklarının mutlak değerlerinin ortalaması farklı test üçgeni yarıçap değerleri için hesaplanmıştır (Şekil 3, r parametresi). Hesaplamalar km/km² birimlerinde yapılmıştır. Hesaplanan parametreler ve gösterimleri aşağıdaki gibidir.

r	Test üçgeni yarıçap parametresi
F_t	Test üçgeni alanı (küresel)
s_t	Test üçgeni kenarı (eşkenar üçgenin bir kenarı, Şekil 3)
p	Alan deformasyonu, düzlem alanın küresel alana oranı
$\overline{dF}$	Alan farkları ortalaması (işaretsiz)
dF_{max}	Alan farkları maksimum değeri (işaretsiz)

Tablo 2. AKA projeksiyonu alan analizi

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
10	17.321	129.904	0.999967	0.004	0.015
15	25.981	292.284	0.99995	0.015	0.052
20	34.641	519.617	0.999932	0.035	0.123
25	43.301	811.902	0.999914	0.07	0.242
30	51.961	1169.142	0.999895	0.123	0.421
35	60.622	1591.336	0.999875	0.199	0.672
40	69.282	2078.485	0.999855	0.301	1.009
45	77.942	2630.59	0.999835	0.435	1.445
50	86.602	3247.654	0.999814	0.605	1.993
55	95.262	3929.676	0.999792	0.817	2.667
60	103.923	4676.658	0.99977	1.075	3.482

Tablo 3. AKS projeksiyonu alan analizi

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
5	8.66	32.476	0.999347	0.021	0.072
10	17.321	129.904	0.998694	0.17	0.578
15	25.981	292.284	0.998041	0.573	1.952
20	34.641	519.617	0.997387	1.358	4.627
25	43.301	811.902	0.996733	2.653	9.037
30	51.961	1169.142	0.996078	4.585	15.615

Tablo 4. AKK projeksiyonu alan analizi 1 ($\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_2 = 60^\circ, n = 0.786566$)

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
5	8.66	32.476	0.999622	0.014	0.091
10	17.321	129.904	0.999245	0.115	0.728
15	25.981	292.284	0.998869	0.387	2.452
20	34.641	519.617	0.998493	0.916	5.799
25	43.301	811.902	0.998119	1.785	11.303
30	51.961	1169.142	0.997746	3.079	19.492

Tablo 5. AKK projeksiyonu alan analizi 2 ($\varphi_1 = 35^\circ, \varphi_2 = 55^\circ, n = 0.696364$)

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
5	8.66	32.476	0.999407	0.022	0.132
10	17.321	129.904	0.998816	0.172	1.05
15	25.981	292.284	0.998228	0.578	3.534
20	34.641	519.617	0.997642	1.367	8.351
25	43.301	811.902	0.997059	2.664	16.263
30	51.961	1169.142	0.996479	4.592	28.018

Sonuçlar Tablo 1-6'da verilmiştir. Tablo değerlerine göre alan hatasının 1 km² altında olduğu küresel üçgen kenar ve alanları (test üçgenleri) yuvarlak değerler alınarak Tablo 7'de özetlenmiştir. Buradan gerçek anlamli silindirik ve konik projeksiyonların alan hatasına daha duyarlı oldukları sonucu çıkmaktadır. Özellikle silindirik projeksiyonda (AKS) yüksek enlemlerde alan hatası daha belirgin durumdadır. Azimutal projeksiyonda ise alan hatası 70 km üzeri kenarlarda belirgindir. Tablo 7'ye göre gerçek anlamli konik ve silindirik projeksiyonlarda kenarları 25 km'yi, alanları 300 km²'yi aşan şekillerde 10 km aralıklarla nokta sıklaştırması yapılması gerektiği düşünülebilir. Azimutal projeksiyonda ise 100 km üzeri kenarlar için 50 km aralıklı sıklaştırma gerektiği görülmektedir. Burada alan hatasının belirgin olduğu kenar uzunluklarının yaklaşık yarısı kadar bir sıklaştırma aralığının alan hatasını küçülteceği değerlendirilmiştir. 10 km ve 50 km sıklaştırma aralıkları bu nedenle önerilmiştir.

Tablo 6. MP projeksiyonu alan analizi

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
20	34.641	519.617	0.99991	0.049	0.086
25	43.301	811.902	0.99988	0.098	0.175
30	51.961	1169.142	0.99985	0.173	0.316
35	60.622	1591.336	0.99982	0.28	0.523
40	69.282	2078.485	0.99980	0.427	0.812
45	77.942	2630.59	0.99976	0.62	1.201
50	86.602	3247.654	0.99973	0.868	1.71
55	95.262	3929.676	0.99970	1.178	2.358
60	103.923	4676.658	0.99967	1.56	3.168

Tablo 7. Alan hatasının 1 km²'yi aşmadığı küresel üçgen kenar ve alanları (yuvarlatılmış değerler)

Proj.	s_t	F_t
AKA	100	4500
AKS	25	300
AKK1	25	300
AKK2	25	300
MP	85	3000

Gerçek anlamli olmayan projeksiyonlar için daha fazla deneme yapılmasına ihtiyaç olmakla birlikte kenarları 100 km, alanları 3000 km² altındaki şekillerde alan hatasının ihmal edilebilir olduğu değerlendirilebilir. Bu tür projeksiyonlarda çeşitlilik fazla olduğundan bu çalışma kapsamına daha fazla projeksiyon alınmamış olup, bu konuda ikinci bir çalışma yapılabileceği değerlendirilmiştir.

3.2. Nokta Sıklaştırması Etkisinin Analizi

Önceki bölümdeki analiz sonucu AKK ve AKS projeksiyonlarında nokta sıklaştırması için 10 km değeri bir ölçüt olarak ortaya çıkmıştır. Bu durumu irdelemek için test üçgenlerinde sıklaştırma yapılarak test noktasi kümelerinde maksimum alan hataları hesaplanmıştır.

Tablo 8-10'dan görüldüğü üzere nokta sıklaştırması alan hatasını düşürmektedir.

AKA projeksiyonu için ise kenarları 100 km üzeri olan test üçgenlerinde 50 km aralıklarla sıklaştırma uygulanmıştır. Ancak yeterli olmadığı görülerek 25 km sıklıkla bir kez daha hesaplama gerçekleştirilmiştir. Tablo 11'de görülen sonuçlar, 25 km sıklaştırmanın etkili olduğu göstermektedir. Bu projeksiyon için 10 km sıklaştırma da düşünülebilir.

Tablo 8. AKS projeksiyonu 10 km sıklaştırma ile alan analizi

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
20	34.641	519.617	0.99981	0.101	0.345
25	43.301	811.902	0.99984	0.132	0.449
30	51.961	1169.142	0.99986	0.164	0.557
35	60.622	1591.336	0.99988	0.196	0.668
40	69.282	2078.485	0.99989	0.222	0.756
45	77.942	2630.59	0.99991	0.245	0.834
50	86.602	3247.654	0.99992	0.271	0.921
55	95.262	3929.676	0.99992	0.299	1.016
60	103.923	4676.658	0.99993	0.329	1.118

Tablo 9. AKK projeksiyonu 10 km sıklaştırma ile alan analizi 1 ($\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_2 = 60^\circ, n = 0.786566$)

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
20	34.641	519.617	0.99989	0.068	0.432
25	43.301	811.902	0.99991	0.089	0.562
30	51.961	1169.142	0.99992	0.11	0.696
35	60.622	1591.336	0.99993	0.131	0.832
40	69.282	2078.485	0.99994	0.149	0.94
45	77.942	2630.59	0.99995	0.164	1.035
50	86.602	3247.654	0.99995	0.18	1.141
55	95.262	3929.676	0.99996	0.199	1.257
60	103.923	4676.658	0.99996	0.218	1.379

Küre üzerindeki eğrilerde nokta sıklaştırması yapılması yalnızca alan hesaplamaları açısından gerekli değildir. Büyük daire yayları ve parametre eğrilerinin (meridyen ve paraleller) eğri görünümü olduğu projeksiyonlarda sıklaştırma gereklidir. Bu nedenle CBS yazılımlarında buna yönelik araçlar ya da eklentiler yer almaktadır. Açık kaynak yazılımlardan QGIS, Shape Tools eklentisi buna örnek verilebilir (URL-1). Eklenti kodları da açık olarak paylaşılmıştır.

Tablo 10. AKK projeksiyonu 10 km sıklaştırma ile alan analizi 2 ($\varphi_1 = 35^\circ, \varphi_2 = 55^\circ, n = 0.696364$)

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
20	34.641	519.617	0.99982	0.102	0.623
25	43.301	811.902	0.99985	0.132	0.808
30	51.961	1169.142	0.99987	0.164	1
35	60.622	1591.336	0.99989	0.196	1.194
40	69.282	2078.485	0.99990	0.221	1.349
45	77.942	2630.59	0.99992	0.244	1.484
50	86.602	3247.654	0.99993	0.269	1.634
55	95.262	3929.676	0.99993	0.296	1.798
60	103.923	4676.658	0.99994	0.324	1.971

Tablo 11. AKA projeksiyonu 25 km sıklaştırma ile alan analizi

r	s_t	F_t	p	$\overline{dF}$	dF_{max}
60	103.923	4676.658	0.99999	0.06	0.194
80	138.563	8314.226	0.99999	0.082	0.256
100	173.203	12991.315	0.99999	0.113	0.344
120	207.843	18708.084	0.99999	0.14	0.415
140	242.482	25464.733	0.99999	0.171	0.493

4. Sonuçlar

Alan koruyan projeksiyonlarda büyük daire yaylarının izdüşümlerinin doğru biçiminde olmamasının neden olduğu alan hatası çoğu CBS kullanıcısının farkında olmadığı hata kaynaklarından biridir. Genel olarak alan korumanın her koşulda geçerli olduğu gibi bir yanılgı vardır. Bu makalede hangi büyüklükteki alanlarda alan hatasının belirgin olduğu deneysel olarak ortaya konulmuş, çözüm için hangi durumlarda ve hangi aralıklarla sıklaştırma yapılacağı irdelenmiştir. Burada önerilen bir nokta etrafında tanımlanan küresel eşkenar üçgen yardımıyla alan farklarının analizi özgün bir yöntemdir.

Alan hatası belli bir alan büyüklüğünden sonra göz ardı edilemeyecek düzeylere ulaşır. Bu büyüklük, projeksiyonlara göre değişim göstermektedir. Konik ve silindirik projeksiyonların bu bakımdan daha duyarlı oldukları gösterilmiştir. Bu projeksiyonlarda 20~km'den uzun kenarlarda 10~km aralıklarla nokta sıklaştırması yapılması alan hatasını küçültmektedir. Alan koruyan gerçek anlamlı olmayan projeksiyonların alan hatası bakımından daha iyi oldukları görülmüştür. Bu tür projeksiyonlarda çeşitlilik fazla olduğundan bu makale kapsamında geniş bir irdeleme yapılmamıştır. Bu konuda ileride ayrı bir araştırma yapılabileceği değerlendirilmiştir.

Çatışma Beyanı

Herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Kaynakça

- Ayres, F. (1954). *Theory and problems of plane and spherical trigonometry, Schaum's outline series*. McGraw-Hill Book Company.
- Bildirici, İ. Ö. (2016). Ortogonal olmayan coğrafi ağı harita projeksiyonlarında Tissot endikatrix elemanlarının belirlenmesi. *Harita Dergisi*, 156, 13-22.
- Bildirici, İ. Ö. (2017). Elipsoit Yüzeyinde Temel Ödev Çözümleri Üzerine Bir İnceleme. *Geomatik*, 2(1), 53-59.
- Bildirici, İ. Ö. (2019). Harita projeksiyonları ve nümerik analiz. *Geomatik*, 4(2), 160 – 169.
- Bildirici, İ. Ö. (2023). *Kartografya: Harita tasarımı ve kullanımı için gerekli bilim, sanat ve teknik*. Atlas Akademi Yayınevi, Konya, 3. baskı.
- Bugayevskiy, L. M. & Snyder, J. (1995). *Map projections: A reference manual*. CRC Press, Philadelphia.
- Canter, F. (2002). *Small-Scale Map Projection Design*. Taylor and Francis, London.
- Hüsrevoğlu, M. & Tuşat, E. (2018). İki boyutlu bazı datum dönüşüm yöntemlerinin incelenmesi. *Geomatik*, 3(1), 22 – 34.
- Koçak, E. (1999). *Harita projeksiyonları*. Karaelmas üniversitesi, Zonguldak.
- Snyder, J. P. (1987). *Map projections-A working manual, volume 1395*. US Government Printing Office, Washington, D.C.
- Snyder, J. P. (1993). *Flattening the Earth*. University of Chicago Press, Chicago.
- Strebe, D. (2017). An efficient technique for creating a continuum of equal-area map projections. *Cartography and Geographic Information Science*, 45, 1-10.
- Uçar, D., İpbüker, C., & Bildirici, İ. Ö. (2011). *Matematiksel Kartografya*. Atlas Yayın Dağıtım, Ankara.
- Ulsoy, E. (1969). *Düzlem ve küresel trigonometri*. Birsan Kitabevi Yayınları, İstanbul.
- URL-1: <https://github.com/NationalSecurityAgency/qgis-shapetools-plugin>
- Usery, E. & Seong, J. (2001). All equal-area map projections are created equal, but some are more equal than others. *Cartography and Geographic Information Science*, 28, 183-194.
- Varol, M. B., & Şanlıoğlu, İ. (2017). Open geospatial consortium web map and feature services and free/open source server/client softwares. *International Journal of Engineering and Geosciences*, 2(1), 17-26.

