Hassas Ortalamalar Üzerine

Doç. Dr. Kenan URAL

Bir istatistik serisinin terimlerinden birinde meydana gelen değişiklikleri aksettirme özelliğini gösteren hassas ortalamaların bilinen genel formülü, n terimli bir seri için şöyledir :

$$M(r) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \tag{1}$$

Bu formülde seri terimleri pozitif olup

$$0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_i \cdots, \leqslant x_n \tag{2}$$

sırasını tâkip eder. Ortalama, büyüklük sırasına göre tertiplenmiş seride en büyük terim ile en küçük terim arasında yer alır :

$$x_1 < M(r) < x_n \;,$$

yani formül (1) e göre :

$$x_1 < \left(\frac{\sum x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} < x_n . \tag{3}$$

Burada r değişkeni iki uç sonsuz değer arasında bulunur :

$$-\infty < r < +\infty$$

r nin bütün pozitif değerleri için ifade (3) geçerli olup negatif değerleri için ise eşitsizlik aşağıdaki şekilde olur :

$$x_1 < \left(\frac{n}{\sum x_i^{-r}} \right)^{\frac{1}{r}} < x_n \tag{4}$$

Şu hale göre ortalamaların seyrini incelersek aşağıdaki sırayı müşahede ederiz :

$$x_1 < \cdots < \left(\frac{n}{\sum x_i^{-r}} \right)^{\frac{1}{r}} < \cdots < \left(\frac{n}{\sum x_i^{-2}} \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{n}{\sum x_i^{-1}} \right) < M(0)$$

$$< \frac{\sum x_i}{n} < \left(\frac{\sum x_i^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} < \cdots < \left(\frac{\sum x_i^{r-1}}{n} \right)^{\frac{1}{r-1}} < \left(\frac{\sum x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} < x_n \tag{5}$$

$r = 0$ halinde $M(0)$ ortalaması geometrik ortalamadan başka bir şey değildir :

$$M(0) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

Son eşitsizlik sonucu olarak $h < r$ olacak şekilde yeni bir h değişkenini gözönünde tutalım. Bu takdirde genel bir sonuç olarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz :

$$\left(\frac{\sum x_i^h}{n} \right)^{\frac{1}{h}} < \left(\frac{\sum x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} . \tag{7}$$

x_i yerine $x_i^{\frac{1}{h}}$ değerini koyalım. Eşitsizliğimizi tesbit edelim :

$$\left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^{\frac{1}{h}} < \left(\frac{\sum x_i^{\frac{r}{h}}}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

veya :

$$\frac{\sum x_i}{n} < \left(\frac{\sum x_i^{\frac{r}{h}}}{n} \right)^{\frac{h}{r}} \tag{8}$$

Daha önce belirtildiği gibi $h < r$, yani $\frac{r}{h} > 1$ şartiyle eşitsizlik (8) daima geçerlidir.

Şimdi de eşitsizlik (8) de x_i yerine $x_i^{\frac{1}{r}}$ değerini koyalım :

$$\frac{\sum x_i^{\frac{1}{r}}}{n} < \left(\frac{\sum x_i^{\frac{1}{h}}}{n} \right)^{\frac{h}{r}}$$

ve her iki tarafın r inci kuvvetini alarak :

$$\left(\frac{\sum x_i^{\frac{1}{r}}}{n} \right)^{r} < \left(\frac{\sum x_i^{\frac{1}{h}}}{n} \right)^{h} \tag{9}$$

eşitsizliğine varırız. r ve h değişkenlerinin tam sayı olarak değer aldıkları kabul edilmektedir. Son eşitsizlikde de r, h 'a göre büyüdükçe ortalamanın küçüleceği görülmektedir :

$$\left(\frac{\sum x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} > \left(\frac{\sum x_i}{n} \right) > \left(\frac{\sum x_i^{\frac{1}{r}}}{n} \right)^{r} > \left(\frac{\sum x_i^o}{n} \right)^{\frac{1}{o}} \tag{10}$$

$r \to \infty$ limiti için varılan $\left(\frac{\sum x_i^o}{n}\right)^{\frac{1}{o}} = M(o)$ geometrik ortalamadır.

Verilen açıklamayı küçük bir misal için uygulayalım. $x_1 = 9$, $x_2 = 16$, $r = 2$ olsun :

$$\left(\frac{\sum x_i^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3+4}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

Bu ortalama ise terimlerin aritmetik ve geometrik ortalamalarının aritmetik ortalamasına eşittir :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9+16}{2} + \sqrt{9 \cdot 16}\right) = \frac{1}{2}(12{,}5 + 12) = 12{,}25 .$$

Verilen misalin genel şekline geçilirse yani $i = 1, 2, \ldots n$ ve r sonlu tam bir sayı olursa, ortalama :

$$M(r) = \left(\frac{\sum \sqrt[r]{x_i}}{n}\right)^r \tag{11}$$

olur.

Ayrıca eşitsizlk (10) da belirtilen bir özelliğe işaret etmek yerinde olur :

$$\left(\frac{\sum x_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} > \frac{\sum x_i}{n} > \left(\frac{\sum x_i^{\frac{1}{r}}}{n}\right)^r$$

$r = 2$ için formül :

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} > \frac{\sum x_i}{n} > \left(\frac{\sum \sqrt{x_i}}{n}\right)^2$$

veya :

$$\frac{\sum x_i^2}{n} > \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \tag{12}$$

şeklini alır. Bu ifade ise kareli ortalama karesinin aritmetik ortalama karesinden daha büyük olduğunu gösterir.

Aynı özellikden faydalanarak aşağıdaki eşitsizliği yazalım :

$$\sqrt[r]{\frac{\sum x_i^r}{n}} > \sqrt[r-1]{\frac{\sum x_i^{r-1}}{n}}$$

veya

$$\left(\frac{\sum x_i^r}{n}\right)^{r-1} > \left(\frac{\sum x_i^{r-1}}{n}\right)^r \tag{13}$$

Bilinen ve kullanılan $r = -1, 0, 1$ ve 2 değerlerine tekabül eden ortalamaların sonsuz sayıda teşkil edilebilecek ortalamalar içinde işgal edeceği yeri tâyin edelim.

n adet pozitif terimden ibaret bir seri mevcut olsun. Terimler arasındaki bağıntılar ve toplam değerler aşağıdaki gibi tarif edilsin :

$${}_1t_1 = x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$${}_2t_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots\cdots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$${}_1t_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots\cdots\; x_{n-1}\,x_n = \sum_{i\neq k}^{\binom{n}{2}} x_i\, x_k$$

$${}_2t_2 = (x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + \cdots\cdots + (x_{n-1}\,x_n)^2 = \sum_{i\neq k}^{\binom{n}{2}} (x_i\, x_k)^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$${}_1t_l = x_1x_2\cdots x_l + x_1x_2\cdots x_{l+1} + \cdots + x_{n-l}\,x_{n-l+1}\cdots x_n + \sum_{i\neq k\neq\cdots\neq h}^{\binom{n}{l}} x_i\, x_k \cdots x_h$$

$${}_2t_l = (x_1x_2\cdots x_l)^2 + (x_1x_2\cdots x_{l+1})^2 + \cdots + (x_{n-l}\cdot x_{n-l+1}x_n)^2 = \sum^{\binom{n}{l}} (x_i\, x_k \cdots x_h)^2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$${}_1t_n = (x_1x_2\cdots x_n)$$

$${}_2t_n = (x_1x_2\cdots x_n)^2 \tag{14}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Böylece teşkil edilen ve genel olarak ${}_pt_l$ sembolü ile gösterilen toplam değerin ortalaması, terim sayısı olan $\binom{n}{l}$ ile bölünüp $pl = r$ dereceden kökün alınmasıyle bulunur :

$$M(l, p) = \left(\frac{{}_p t_l}{\binom{n}{l}} \right)^{\frac{1}{r}} \tag{15}$$

Bu formülde l ve p değişkenlerine verilecek değerlere göre muhtelif ortalamaları elde etmek mümkündür. Meselâ $l = 1$ ve $p = 1$ için $r = 1$ ve ${}_p t_l = \Sigma x_i$ olduğuna göre :

$$M(1, 1) = \frac{\Sigma x_i}{n} \tag{16}$$

yani aritmetik ortalama olur. Buna karşılık $l = 1$, $p = 2$, $r = lp = 2$ için :

$$M(1, 2) = \left(\frac{{}_2 t_1}{\binom{n}{1}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

ve ${}_2 t_1 = \Sigma x_i^2$ olduğundan $M(1, 2)$ kareli ortalama olmuş olur.

$l = 1$, $p = -1$ için ortalamayı yazalım :

$$M(1, -1) = \left(\frac{{}_{-1} t_1}{\binom{n}{1}} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \tag{18}$$

Bu şekilde harmonik ortalamanın elde edildiği görülür.

$l = n$, $p = 1$ halinde $M(n, 1)$ ortalaması :

$$M(n, 1) = \left(\frac{{}_1 t_n}{\binom{n}{n}} \right)^{\frac{1}{n}} = (x_1 x_2 \cdots\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \tag{19}$$

geometrik ortalamayı verir. Bu formülde p ve l yerine herhangi bir sonlu değer verelim ve ortalamayı hesaplayalım :

$$M(n, p) = \left(\frac{{}_p t_n}{\binom{n}{n}} \right)^{\frac{1}{np}} \tag{20}$$

yani :

$$M(n, p) = [(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots x_n)^p]^{\frac{1}{np}} = (x_1 x_2 \cdots\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

olur ki bu da formül (19) ile gösterilen geometrik ortalamadır. O halde $l = n$ ve $p \not\to \infty$ için her zaman geometrik ortalamayı elde etmiş oluruz.

Bundan başka $l = 2$ ve $p = 2$ için ortalama düşünülürse, $r = 4$ olur ve :

$$M(2, 2) = \left(\frac{{}_2t_2}{\binom{n}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\Sigma\, (x_i\, x_j)^2}{\binom{n}{2}} \tag{21}$$

ortalamasına varılır.

Görülüyor ki l ve p değişkenlerinin alacağı değerlere göre çok çeşitli ortalamalar elde etmek mümkündür. İstatistikde kullanılan ortalamalar, yukarıda belirtilen genel ortalama formülü (15) in birkaç özel haline tekabül eder.

Ortalamaların hesabı için kullanılan ve genel formül olarak bilinen :

$$M(r) = \left(\frac{\Sigma\, x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

formülü esasında formül (15) in özel bir halidir, yani :

$$M(l, p) = \left(\frac{{}_pt_l}{\binom{n}{l}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

formülünde $l = 1$ ve $r = lp = p$ için :

$$M(1, p) = \left(\frac{{}_pt_1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\Sigma\, x_i^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\Sigma\, x_i^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

olur. Şu hale göre $M(l, p)$ genel formülü çok çeşitli ve kompleks ortalamaları içine alan bir ifadedir.

Bir misal vererek genel formülün uygulanmasını takip edelim : 4 terimli bir seri olsun : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$. Bu değerlerden hareket ederek formül (15) yardımiyle p ve l değişkenlerinin bazı değerleri için ortalamaları hesaplayarak bir tablo halinde gösterelim :

l	1	2	3	4
p	$\left(\frac{\Sigma x_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\left(\frac{\Sigma (x_i x_j)^p}{\binom{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2p}}$	$\left(\frac{\Sigma (x_i x_j x_k)^p}{\binom{n}{3}}\right)^{\frac{1}{3p}}$	$(x_1 x_2 x_3 x_4)^{\frac{1}{4}}$
—6	1.259	1.981	2.459	2.912
—5	1.318	2.023	2.485	2.912
—4	1.408	2.080	2.520	2.912
—3	1.558	2.165	2.567	2.912
—2	1.824	2.303	2.634	2.912
—1	2.285	2.539	2.740	2.912
0	2.912	2.912	2.912	2.912
1	3.500	3.341	3.158	2.912
2	3.937	3.683	3.404	2.912
3	4.254	3.917	3.588	2.912
4	4.495	4.078	3.711	2.912
5	4.686	4.194	3.794	2.912
6	4.840	4.282	3.852	2.912

Bu tabloyu inceleyerek muhtelif ortalamaların büyüklüklerini, seyrini ve en etkili faktörlerin hangileri olduklarını kolaylıkla görmek kabil olmaktadır.

SONUÇ

Hassas ortalamaların bilinen genel bir formülü üzerinde bazı özellikler gösterilip esas kullanılan ortalamalar belirtildi. Sonra bütün hassas ortalamaların hesabı için çok daha genel bir formül açıklandı. Başlangıçta tarif edilen genel formülün bu defa belirtilen esas genel formülün özel bir hali olduğuna bilhassa işaret edildi. Çok küçük bir seri verilerek açıklanan son genel formülün uygulanışı gösterilmek suretiyle hesaplanan muhtelif ortalama değerleri tablo halinde ifade edilip mukayeselerine çalışıldı.

Bibliografi :

H. Jecklin und M. Eisenring: "Die elemantaren Mittelwerte" M. V. S. V. 47. Band-Heft 1, Staempflie und Cie, 1947, **Bern.**