KUADRATİK PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE MARKOV GEÇİŞ MATRİS DEĞERLERİNİN BELİRLENMESİ

Tuncay CAN(*)

Özet: Modern olasılık teorisi geçmiş verilerin bilinmesi ile geleceği tahmin etmede şans süreçlerini kullanır. Şansa dayalı deneylerin bir dizisini gözlemlediğimizde geçmiş verilerin hepsi gelecek deneyler için tahminimizi etkileyebilir. 1907 de A.A Markov şans süreçlerinin önemli yeni bir tipi üzerinde çalışmaya başladı. Markov zincirleri olarak adlandırılan bu süreçte yapılan bir deneyin sonucu bir sonraki deneyin sonucunu etkileyebilir. Bir sistemin (Markov modelinin) yapılandırılmasında süreç içerisinde belirlenmesi gereken iki unsur vardır. Bu unsurlar sistemin mümkün durumlarını ve durumlar arasında hareketin geçiş olasılıklarının belirlenmesini içerir. Markov zincirleri stokastik süreçler olarak bilinen daha genel olasılık modellerinin özel bir durumudur ve sistemin gelecek yörüngesinin sadece şu anki mevcut duruma bağlı olduğunu yani geçmiş tüm durumlardan bağımsız olduğunu vurgular. Bu makalede geçiş matrisi Kuadratik Programlama ile belirlenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Stokastik Süreçler, Markov Zincirleri, Geçiş Matrisi, Kuadratik Programlama.

Abstract: Modern probability theory studies chance processes for which the knowledge of previous outcomes influences predictions for future experiments. In principle, when we observe a sequence of chance experiments, all of the past outcomes could influence our predictions for the next experiments. In 1907, A.A. Markov began the study of an important new type of chance process. In the process, the outcome of a given experiment can affect the outcome of the next experiment. This type of process is called a Markov Chain. There are two elements that must be determined in the process of constructing a Markov model of a system. These elements include determining the possible states of the system and the transition probabilities of moving between states. Markov chains are a special case of the more general probabilistic models known as stochastic processes. Markov chains are stochastic processes without after-effect, that is, such processes for which the knowledge of the present state uniquely determines its future stochastic behaviour, and this behaviour does not depend on the past of the process. In this paper transition matrix is determined with Quadratic Programming.

Keywords: Stochastic Processes, Markov Chains, Transition Matrix, Quadratic Programming.

I.Giriş

Son yıllarda Yöneylem Araştırmasındaki tekniklerin gelişmesiyle pazarlama alanında daha etkin sonuçlar alınmaya başlanmıştır. Çünkü pazarlamadaki kavramların sayısallaştırılması ve bu kavramlara ölçülebilir

(*) Yrd.Doç.Dr. Marmara Üniversitesi İİBF Ekonometri Bölümü

özellik verilmesiyle pazarlama daha bilimsel bir yapıya kavuşturulmuştur. Pazarlama yönetiminde karar verme ”*sayısal modeller*” olarak adlandırılan teknikler yardımı ile gerçekleşir. Sözü edilen sayısal modeller ilgilenilen amaca göre çeşitli gruplara ayrılır. Bu gruplama; pazar paylarının tespiti ve buna bağlı olarak marka bağımlılığı ile ilgili modeller, yeni ürün planlaması ve satış tahminleriyle ilgili modeller, mevcut ürünler için satış karar modelleri, mikro analitik satış modeli, mikro davranış satış modelleri, dağıtım karar modelleri, satış geliştirme kararları ve modelleri şeklinde yapılabilir. Modellerin çözümü için genellikle Markov zincirleri, doğrusal olmayan programlama, doğrusal programlama, simülasyon teknikleri, Bayesian istatistik gibi tekniklerden yararlanılır.

Bu çalışmada geçmiş ve mevcut durumda işletmenin pazar paylarının bilinmesi ile geleceğe yönelik pazar paylarının tahmininde önemli bir yeri olan ve çalışmanın temelini oluşturan geçiş olasılıkları matrisinin tahmini yapılmıştır. Durumlar arası geçiş olasılıklarını içeren Markov zincirleri olarak da adlandırılan geçiş olasılıkları matrisi genellikle anket yöntemi ile belirlenmektedir. Ancak anket yöntemi işletmeler için çoğunlukla zaman alıcı ve maliyet gerektiren bir yöntem olduğu için bu makalede işletmenin geçmiş ve mevcut durumda pazar paylarının bilinmesi ile anket yöntemine başvurmaksızın, anket yöntemi ile elde edilecek geçiş olasılıkları matrisi, doğrusal olmayan programlamanın bir özel durumu olan kuadratik programlama ile belirlenecektir.

II. Markov Süreç Davranışı

Markov analizi, pazarlama problemlerinin çözümünde ve karar verme süreçlerinin artırılmasında daha etkin bir yöntem olarak kullanılır hale gelmiştir. Mevcut durumda pazar paylarının bilinmesi ile ileriye dönük pazar paylarının tahmininde Markov analizi güçlü bir yöntemdir. “*Markov Analizi*” terimi sistemin gelecekteki davranışını tahmin etmek için şu anki davranışını analiz eden bir tekniği ifade eder. Markov Analizi, zamanla bir durumdan diğer duruma geçişteki olasılıkları belirlenebilen sistemlere uygulanabilir. Müşterinin marka değişikliği, makine bakımı, alacakların tahsili problemi, pazar fiyat hareketliliği, göç olgusu v.b. Markov Analizi’nin uygulamalarından sadece bir kaçıdır. (Markland ve Sweigart, 1987: 666).

Bir deneysel olguyu tanımlamada matematiği kullanmak için bir matematiksel modelin kurulması zorunludur. Bir deneyin matematiksel modelinin kurulmasında ilk adımlardan biri sözkonusu deneyin bütün mümkün sonuçlarının kümesini belirsizliğe yol açmayacak bir biçimde tanımlamaktır. Tesadüfî olmayan deneysel olgular içersinde belirsizlik olmadığı için incelemekte gereksiz olacaktır. Bu nedenle söz konusu deneyin tesadüfi olması gerekir. Olasılık teorisi tesadüfî deneyler ile ilgili çalışmada matematiksel bir temel sağlar (Brémaud, 1999: 1).

Genel olarak, başlangıç vektörü a_0 iken sürecin n-adım sonraki dağılımı $a_n = a_{n-1}.P$ veya $a_n = a_0.P^n$ bağıntısı ile bulunabilir. P^n matrisi n-adım geçiş olasılıklarını temsil eder P^n nin elemanları $p_{ij}(n)$ ile gösterilir:

$p_{ij}(n) = P\{X_{k+n} = j | X_n = i\}$ $\quad p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \,, i \neq j \text{ ise} \\ 0 \,, i = j \text{ ise} \end{cases}$ olduğu açıktır. Bütün negatif olmayan m ve l tamsayıları için

$$p_{ij}(l+m) = \sum_{k \in S} p_{ik}(l).p_{kj}(m) \quad \ldots (*)$$

bağıntısı geçerlidir. $p_{ij}(l+m)$, i den j ye tanımlı $(l+m)$ adımda gitmenin olasılığını verir. $(*)$ denklemine "*Chapman-Kolmogorov denklemi*" denir.

III. Kuadratik Programlama

Amaç fonksiyonu ve kısıtların doğrusal olduğu bir problem "*Doğrusal Programlama Problemi*" olarak adlandırılır. Kuadratik Programlamanın Doğrusal Programlama probleminden tek farkı amaç fonksiyonundaki $i \neq j$ için terimlerin x_j^2 ve $x_i x_j$ şeklinde olmasıdır. Kuadratik Programlama probleminin matris şeklindeki notasyonu

$$[\text{Mak}] f(x) = cx - \frac{1}{2} x^T Q x$$
$$\text{Kısıtlar : } Ax \leq b \text{ ve } x \geq 0$$

şeklindedir. c bir satır vektörü, x ve b sütun vektörleri, Q ve A matrisler ve T transpozeyi gösterir. Q matrisinin elemanları q_{ij} sabitlerinden oluşur ve $q_{ij} = q_{ji}$ eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik amaç fonksiyonundaki $\frac{1}{2}$ çarpanının sebebidir. Şu halde amaç fonksiyonu q_{ij}, c nin elamanları c_j cinsinden aşağıdaki şekilde de yazılabilir (Hillier ve Lieberman 1995: 586).

$$f(x) = cx - \frac{1}{2} x^T Q x \qquad = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

Kuadratik Programlama hakkındaki detaylı bilgi için bakınız (Zhibin, 2005: 447,18 ve Krogsted, 2005: 1–20).

IV. Kuadratik Programlama ile Geçiş Matrisi Değerlerinin Belirlenmesi

Kuadratik Programlama ile geçiş matrisi değerlerinin belirlenmesine yönelik bir literatür taraması yapıldığında, teorik ve uygulama ile ilgili çalışmaların yoğun bir şekilde arttığı gözlenir.Bu yöntem ,örneğin finansal analizlerde uygulama alanı bulmaktadır(Christodoulakis,2005:2-4).Yine bir başka çalışmada Kuadratik Programlama kullanılarak Markov geçiş matris değerleri belirlenmiş ve kredi riski üzerine bir uygulama yapılmıştır(Jones,2005:6-22).Bununla birlikte mikro verilerden yararlanılarak geçiş olasılıklarını tahmin eden teorik çalışmalara da rastlanmaktadır(Collins,1974:355 ve Kelton,2005:175-194). Moleküler dinamik ve meteoroloji dallarında özellikle sürekli zaman serilerinde sonuçlardan yola çıkılarak model belirleme amacı ile Markov geçiş matrislerine başvurulmaktadır. Kuadratik programlama ile çözüme yönelik etkin algoritma yazılabileceği çeşitli örnekler üzerinde gösterilmektedir (Crommelin, Vanden-Eijnden, 2006: 782-805).

Geçiş matrisinin tahmini bu çalışmada anlatılan yöntemden tamamen farklı olan, Lagrange Çarpanları Yöntemi olarak bilinen teknik ile de yapılabilir. Bu teknikte optimizasyon problemi Quasi-Newton algoritması kullanılarak amaç fonksiyonunun Hessian matrisinin ters matrisi her iterasyonda yazılan algoritmalarla aranan hedefe yaklaştırılmaktadır (Çilingirtürk, 2003: 205–211). Doğrusal Programlama kullanılarak geçiş matrisinin tahmini de yapılabilmektedir (Can, 2004: 508–510). Geçiş matrisinin bulunması için genellikle anket yapılması gerekir. Bu makalede ise farklı bir yol denenmekte; ilgili konuda geçmiş pazar paylarının periyodları göz önüne alınarak geçiş matrisi Kuadratik Programlama ile tahmin edilip, söz konusu geçiş matrisinin gelecek periyodlarda kullanılması adına anket yapılmaksızın geçiş matrisinin bulunmasına yönelik bir çalışma ortaya konulmaktadır.

K şirketi içeren N duruma sahip bir pazarlama uygulamasını düşünelim. Pazar paylarının ilk periyod için $\left(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, \ldots, V_N^{(0)}\right)$ ve 2. periyod için $\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \ldots, V_N^{(1)}\right)$ ve böyle devam ederek w periyod için $\left(V_1^{(w)}, V_2^{(w)}, \ldots, V_N^{(w)}\right)$ olduğunu farz edelim. Tahmin edilmesi gereken geçiş matrisimiz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ . & & & \\ . & & & \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

olsun. Başlangıç pazar payı vektörümüz $\left(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, \ldots, V_N^{(0)}\right)$ ve ikinci pazar payı vektörümüz $\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \ldots, V_N^{(1)}\right)$ olduğundan

$$\left(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, \ldots, V_N^{(0)}\right) P = \left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \ldots, V_N^{(1)}\right) \quad \ldots \quad (1)$$

bağıntısı geçerlidir.(1) bağıntısı aşağıdaki denklemleri verir:

$$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{ij} = V_j^{(1)}, \; j = 1,2,\ldots,N$$

$\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \ldots, V_N^{(1)}\right)$ periyodundan başlayarak bir sonraki periyod için aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \ldots, V_N^{(1)}\right) P = \left(V_1^{(2)}, V_2^{(2)}, \ldots, V_N^{(2)}\right) \quad \ldots \quad (2)$$

(2) bağıntısı için denklemler $\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{ij} = V_j^{(2)}, \; j = 1,2,\ldots,N$ şeklindedir. Bu şekilde devam ederek

$\left(V_1^{(w-1)}, V_2^{(w-1)}, \ldots, V_N^{(w-1)}\right)$ periyodundan başlayarak $\left(V_1^{(w)}, V_2^{(w)}, \ldots, V_N^{(w)}\right)$ periyodu

için $\left(V_1^{(w-1)}, V_2^{(w-1)}, \ldots, V_N^{(w-1)}\right) P = \left(V_1^{(w)}, V_2^{(w)}, \ldots, V_N^{(w)}\right)$ bağıntısından

$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{ij} = V_j^{(w)}, \; j = 1,2,\ldots,N$ denklemleri elde edilir.

Elde edilen bilgiler bir tablo yardımıyla özetlenebilir:

Tablo 1: *W Periyot İçin Tahmini ve Gerçel Değerler Tablosu*

Zaman	Durum	Tahmin Edilen	Gerçel	Hata
1	1	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{i1}$	$V_1^{(1)}$	$V_1^{(1)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{i1}$
	2	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{i2}$	$V_2^{(1)}$	$V_2^{(1)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{i2}$
	...	...	...	...
	N	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{iN}$	$V_N^{(1)}$	$V_N^{(1)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{iN}$
2	1	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{i1}$	$V_1^{(2)}$	$V_1^{(2)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{i1}$
	2	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{i2}$	$V_2^{(2)}$	$V_2^{(2)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{i2}$
	...	...	...	...
	N	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{iN}$	$V_N^{(2)}$	$V_N^{(2)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{iN}$
...	...	...	...	...
w – 1	1	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{i1}$	$V_1^{(w)}$	$V_1^{(w)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{i1}$
	2	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{i2}$	$V_2^{(w)}$	$V_2^{(w)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{i2}$
	...	...	...	...
	N	$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{iN}$	$V_N^{(w)}$	$V_N^{(w)} - \sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{iN}$

Şimdi,

$$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{ij} = V_j^{(1)} \qquad , \; j = 1,2,\ldots,N$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{ij} = V_j^{(w)} \quad , \; j = 1,2,\ldots,N$$

doğrusal denklem sistemi

$$[\text{Mak}]Z = p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{NN}$$

kısıtlar :

$$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{ij} = V_j^{(1)} \qquad , \; j = 1,2,\ldots,N \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{ij} = V_j^{(w)} \quad , \; j = 1,2,\ldots,N$$

$$p_{ij} \in [0\,,1] \; ; \; i = 1,2,\ldots,N$$
$$j = 1,2,\ldots,N$$

şeklinde bir doğrusal programlama probleminin çözümüne yaklaştırılabilinir. Pazarlama biliminde marka bağımlılığı geçiş matrisindeki asal köşegen üzerindeki elemanların maksimum olmasını gerektirir. Ancak doğrusal programlama probleminin çözümü bilgisi ışığında (3) ile ifade edilen modelin çözümü yani p_{ij} değerlerinin bulunması imkânsızdır. Bu nedenle (3) ile ifade edilen problemde herbir zaman periyodunda tahmin edilen değerlerle gerçel değerler arasındaki farkın kareleri toplamını minimize etmek p_{ij} tahmini değerlerin gerçeğe oldukça yakın olmasını sağlayacaktır. Parametre tahmini için bakınız (Draper ve Smith, 1981).

Şu halde;

$$\begin{aligned}
[\text{Min}]\Lambda = {} & \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{i1} - V_1^{(1)}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{i2} - V_2^{(1)}\right]^2 \\
& + \ldots + \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(0)}.p_{iN} - V_N^{(1)}\right]^2 \\
& + \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{i1} - V_1^{(2)}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{i2} - V_2^{(2)}\right]^2 \\
& + \ldots + \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)}.p_{iN} - V_N^{(2)}\right]^2
\end{aligned}$$

$$+\ldots+\left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{i1} - V_1^{(w)}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{i2} - V_2^{(w)}\right]^2$$

$$+\ldots+\left[\sum_{i=1}^{N} V_i^{(w-1)}.p_{iN} - V_N^{(w)}\right]^2$$

Kısıtlar: $p_{ij} \in [0,1]$; $i = 1,2,\ldots,N$

$j = 1,2,\ldots,N$

problemini çözmeye ihtiyacımız vardır. Λ amaç fonksiyonu minimize edileceğinden amaç fonksiyonundaki sabitlerin yok edilmesi p_{ij} değerlerini etkilemeyeceğinden bu sabitler yok edilerek amaç fonksiyonu

$$\Lambda = cx - \frac{1}{2}x^T Qx$$

şeklinde bir kuadratik (karesel) fonksiyona indirgenir. Şu halde problem bir Kuadratik Programlama problemine indirgenerek QSB paket programı yardımıyla kolaylıkla çözümlenerek geçiş matrisinin tahmini gerçekleşmiş olur.

V. Uygulama

Bu çalışmada pazarlama araştırmasının önemli problemlerinden bir olan pazar payı tahmininde kullanılabilecek Markov geçiş matrisinin teorik olarak belirlenmesi amaçlanmıştır. Bununla birlikte araştırma Türkiye'nin önde gelen sektörlerinden olan otomotiv sektörü üzerine yönlendirilmiştir.

Otomotiv sanayi, demir-çelik, petro-kimya, lastik gibi temel sanayi dallarında, başlıca alıcı ve bu sektörlerdeki teknolojik gelişmelerin de sürükleyicisi konumundadır. 1990'lı yıllardan günümüze kadar geçen süreç içerisinde sanayileşmiş ülkelerde ulaşılan sermaye birikiminin boyutu yeni ekonomik yönelimlerle birlikte tüm ekonomik sektörler gibi otomotiv sektörünü de büyük çapta etkilemiştir. Uygulanan küresel politikalar sonucunda merkez ülkelerdeki teknoloji ve bilgi üretimi geliştirilmiş, çevre ülkelerde ise klasik emek yoğunluklu sanayi üretimi desteklenmiştir (TMMOB, 2006). Dolayısıyla, ülkemizde otomotiv sektörü uzun yıllar boyunca ithalata karşı korunmuş ve sermaye ile teknoloji birikiminin sağlanmasına çalışılmıştır. 1991-1993 yılları Türk otomotiv sektörünün üretim açısından en hızlı gelişiminin sağlandığı dönemdir. Bu dönemde imalat sanayiindeki ve iç talepteki hızlı gelişime paralel olarak taşıt araçlarında özellikle de otomobil üretiminde önemli ölçüde üretim artışı sağlanmış ve sektördeki büyüme ortalama % 30'lara ulaşmıştır. Ancak 1994 yılında yaşanan kriz ve hükümetlerin uyguladıkları ekonomik ve siyasi programlar ile bu dönemde hızlandırılan AB entegrasyon süreci ve Gümrük Birliği uygulamaları sonucunda ithalatın toplam pazardaki payı artmıştır. Özellikle 1996 yılında Gümrük Birliğine girilmesi ile ithalatta yaşanan artış otomotiv sanayinin içine girdiği olumsuz koşulları daha da ağırlaştırmıştır.

Çalışmada özellikle yerli ve ithal araç talebi arasında geçişler irdelenerek Türkiye'de otomotiv sektöründe yerli araç üretimini belirleyecek talep gelişimi ortaya konmaya çalışılacaktır. Bu nedenle sektör yıllara göre incelendiğinde 2001 yılı başında da yaşanan finansal kriz ve sonrasındaki hükümet politikaları yapısal değişiklikler yarattığından, daha durağan bir dönem olan 1996-2001 yılları araç satışları dikkate alınmıştır. Otomotiv sektörü satış miktarlarına ilişkin kullanılan kaynakta 1997 yılı değerleri verilmemiştir.

Tablo 2:*Otomotiv Sektörü Yıllık Motorlu Taşıt Satış Miktarları (Bin Adet)*

	1996	1998	1999	2000	2001
Toplam Satış	343	478	403	659	196
Yerli Araç Sat.	246	298	226	319	101
İthal Araç S.	97	180	177	340	95

Kaynak: OSD, Nisan 2002

Bu periyot dahilinde yerli ve ithal araçların satışları dikkate alınarak pazar payları aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.Vektörlerin ilk elemanları Yerli Araç Satış,ikinci elemanları ise İthal Araç Satış oranlarını göstermektedir.

1996: $\left(V_1^{(0)} \; V_2^{(0)}\right) = \left(0,72 \;\; 0,28\right)$

1998: $\left(V_1^{(1)} \; V_2^{(1)}\right) = \left(0,62 \;\; 0,38\right)$

1999: $\left(V_1^{(2)} \; V_2^{(2)}\right) = \left(0,56 \;\; 0,44\right)$

2000: $\left(V_1^{(3)} \; V_2^{(3)}\right) = \left(0,48 \;\; 0,52\right)$

2001: $\left(V_1^{(4)} \; V_2^{(4)}\right) = \left(0,52 \;\; 0,48\right)$

Bu durumda tahmin edilecek geçiş matrisi

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ veya kısaca $P = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$ olsun. Şu halde

$\left(0,72 \;\; 0,28\right)P = \left(0,62 \;\; 0,38\right)$ bağıntısından

$$0,72p_1 + 0,28(1-p_2) = 0,62$$

$$0,72(1-p_1) + 0,28p_2 = 0,38$$

denklemleri elde edilir. Bu şekilde devam ederek

$\left(0,62\ \ 0,38\right)P=\left(0,56\ \ 0,44\right)$ bağıntısından

$$0,62p_1+0,38\left(1-p_2\right)=0,56$$
$$0,62\left(1-p_1\right)+0,38p_2=0,44$$

denklemleri,

$\left(0,56\ \ 0,44\right)P=\left(0,48\ \ 0,52\right)$ bağıntısından

$$0,56p_1+0,44\left(1-p_2\right)=0,48$$
$$0,56\left(1-p_1\right)+0,44p_2=0,52$$

denklemlerini ve sonuçta da

$\left(0,48\ \ 0,52\right)P=\left(0,52\ \ 0,48\right)$ bağıntısından da

$$0,48p_1+0,52\left(1-p_2\right)=0,52$$
$$0,48\left(1-p_1\right)+0,52p_2=0,48$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bilgileri bir tablo ile özetleyelim:

Tablo 3: *Beş Periyot İçin Tahmini ve Gerçel Değerler Tablosu*

Zaman	Durum	Tahmini	Gerçel
1	1	$0,72p_1+0,28(1-p_2)$	0,62
	2	$0,72(1-p_1)+0,28p_2$	0,38
2	1	$0,62p_1+0,38(1-p_2)$	0,56
	2	$0,62(1-p_1)+0,38p_2$	0,44
3	1	$0,56p_1+0,44(1-p_2)$	0,48
	2	$0,56(1-p_1)+0,44p_2$	0,52
4	1	$0,48p_1+0,52(1-p_2)$	0,52
	2	$0,48(1-p_1)+0,52p_2$	0,48

Şu halde geçiş matrisini tahmin etmek için problemimiz,

$$
\begin{aligned}
[Min]\Lambda = & \left[0,72p_1 + 0,28(1-p_2) - 0,62\right]^2 \\
& + \left[0,72(1-p_1) + 0,28p_2 - 0,38\right]^2 \\
& + \left[0,62p_1 + 0,38(1-p_2) - 0,56\right]^2 \\
& + \left[0,62(1-p_1) + 0,38p_2 - 0,44\right]^2 \\
& + \left[0,56p_1 + 0,44(1-p_2) - 0,48\right]^2 \\
& + \left[0,56(1-p_1) + 0,44p_2 - 0,52\right]^2 \\
& + \left[0,48p_1 + 0,52(1-p_2) - 0,52\right]^2 \\
& + \left[0,48(1-p_1) + 0,52p_2 - 0,48\right]^2
\end{aligned}
$$

$$p_1 \in [0,1], \quad p_2 \in [0,1]$$

şeklindedir. Gerekli açılımlar ve düzenlemeler yapıldığında problem,

$$
\begin{aligned}
[Min]\Lambda = & 2\left[0,5184p_1^2 - 0,4032p_1p_2 + 0,0784p_2^2 - 0,4896p_1 + 0,1904p_2 + 0,1156\right] \\
& + 2\left[0,3844p_1^2 - 0,4712p_1p_2 + 0,1444p_2^2 - 0,2232p_1 + 0,1368p_2 + 0,0324\right] \\
& + 2\left[0,3136p_1^2 - 0,4928p_1p_2 + 0,1936p_2^2 - 0,0448p_1 + 0,0352p_2 + 0,0016\right] \\
& + 2\left[0,2304p_1^2 - 0,4992p_1p_2 + 0,2704p_2^2\right]
\end{aligned}
$$

$$p_1 \in [0,1], \quad p_2 \in [0,1]$$

ve sonuçta amaç fonksiyonu minimize edileceğinden herbir terimdeki 2 sabiti ve sabit terim yok edilerek problem,

$[Min]\Lambda = \left[1,4468p_1^2 - 1,8664p_1p_2 + 0,6868p_2^2 - 0,7576p_1 + 0,3624p_2\right]$ şeklinde sadece $p_1 \in [0,1]$, $p_2 \in [0,1]$ kısıtları olan bir Kuadratik Programlama problemine indirgenir. Problemin QSB paket programı yardımıyla çözülmesinden $p_1 = 0,74$, $p_2 = 0,26$ elde edilir. Şu halde tahmini geçiş matrisimiz aşağıdaki gibidir;

$$P = \begin{pmatrix} 0,74 & 0,26 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix}$$

Bulunan p_1 ve p_2 değerlerinin Tablo–3 deki tahmini değer sütününda yerlerine yazılmasıyla gerçel değerlere ne kadar yakın olduğu gözlemlenebilir:

Tablo 4: *Beş Periyot İçin Sonuç Tablosu*

Zaman	Durum	Tahmini	Gerçel	Hata
1	1	0,6056	0,62	0,0144
	2	0,3944	0,38	-0,0144
2	1	0,5576	0,56	0,0024
	2	0,4424	0,44	-0,0024
3	1	0,5288	0,48	-0,0488
	2	0,4712	0,52	0,0488
4	1	0,4904	0,52	0,0296
	2	0,5096	0,48	-0,0296

VI.Sonuç

Pazarlama problemlerinin çözümünde sayısal modellerin önemi yadsınamaz. Geleceğe yönelik pazar paylarının tahmini her işletmenin mutlaka bilmek isteyeceği bir olgudur. Birçok işletme için zamanı en iyi bir şekilde değerlendirmek ve maliyetleri minimize etmek veya başka söylemle kârı maksimum yapmak, işletmenin varlığını korumak ve sürdürebilmek için zorunludur. Genellikle işletmelerin amacı hedefledikleri müşteriye ulaşarak pazar paylarını arttırmaktır. Bu makalede; deneme-yanılma, tecrübeye dayalı karar alma ve uygulama yerine geçmiş veya şu andaki mevcut pazar paylarının bilinmesi ile ileriye yönelik pazar paylarının tahmininde kuadratik programlama tekniği kullanılarak geçiş olasılıkları tahmini matrisi belirlenmiştir. Geçiş matrisinin bulunması, işletmelerin durumlar arasındaki geçiş olasılıklarını bilmesi, kendilerini değerlendirme ve ileriye yönelik kararlar alması açısından son derece önemlidir. Anket yapılmadan, zaman ve maliyet kaybı yaşanmadan güçlü bir teorisi bulunan Markov geçiş matrisinin en genel hali elde edilmiştir. Kuadratik programlama ile geçiş olasılıkları matrisinin tahmini yapılarak işletmelerin bu olasılıklara göre değerlendirilmesi bu çalışmanın merkezini oluşturmaktadır. Sayısal bir uygulama verilerek tekniğin işleyişi genelden özele indirgenerek ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Uygulamada otomativ sektöründe yerli ve ithal araçların talepleri arasındaki geçiş olasılıkları, geçmiş pazar paylarının belli olması ile gerçel değerlere oldukça yakın bir şekilde tahmin edilmiştir. 1996-2001 dönemi incelendiğinde ithal araç talebi eğiliminin arttığı gözlenmektedir. Ancak talepteki bu değişim geçiş olasılıkları ile değerlendirildiğinde yerli araç tercih edenlerin %74'ünün bir sonraki dönemde tekrar yerli araç talebinde bulunduğu ve %26'sının ithal araç tercihi yaptığı ortaya çıkmaktadır. Talep tercihleri arasındaki geçiş olasılıklarının anket kullanılmaksızın bulunması bu çalışmanın önemini ortaya koymaktadır.

Kaynaklar

Brémaud, P. (1999), Markov Chains: Gibbs Fields Monte Carlo Simulation and Queues, New York: Springer-Verlag,

Can, T. (2004), "Analysis of Estimating Markov Chains Transition Matrix with Linear Programming", International Scientific Conference, Unitech'04, Gabrovo, Bulgaria, ss.508-510

Christodoulakis,G.A.(2005),Markovian Credit Risk Transition Probabilities under Non-Negativity Constraints fort he US Portfolio 1984-2004,http://www.bankofgreece.gr/announcements/files/Christodoulakis.pdf.,ss 2-4,26 Eylül 2006

Collins,L.,(1974),"Estimating Markov Transition Probabilities from Micro-unit Data",Applied Statistic,Vol.23,No:3,ss.355

Crommelın, D.T., Vanden-Eijnden, E., (2006), "Fitting Timeseries by Continuous-Time Markov Chains: A Quadratic Programming Approach", Journal of Computational Physics, 217, ss. 782–805

Çilingirtürk, A. (2003), "Pazar Payı, Zaman Serilerinin Kullanılması İle Markalar Arası Geçiş Matrisinin Belirlenmesine Yönelik Model Önerisi", Öneri: Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt 5, Yıl 10, Sayı 20, Haziran 2003, ss.205–211.

Draper, N. & Smıth, H. (1981), Applied Regression Analysis, Second Edition, New York:John Wiley & Sons

Hıllıer, F. & Lıeberman, G. (1995), Introduction To Operations Research, Mc Graw-Hill, Inc.

Jones,M.T.(2005),"Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data:An Applications To Credit Risk",International Monetary Fund,November,Ss.6-22.

Kelton,C.M.L&Kelton,W.D.(1987),"Comparison Of Hypothesis Testing Techniques For Markov Processes Estimated From Micro Versus Macro Data",Annals Of Operations Research ,Vol.8,No:1,Ss.175-194.

Krogsted, H. (2005), Quadratic Programming Basics, [Www Document] URL http://www.math:ntnu.no/~hek/optimering 2005/QPbasics OH.pdf, ss.1-20.

Markland, R. & Sweıgart, J. (1987), Quantitative Methods : Applications to Managerial Decision Making, New York: John Wiley & Sons.

TMMOB Makina Mühendisleri Odası, Oda Görüşleri, (2006), Otomotiv Ve Yan Sanayinde Yaşanan Gelişmeler, Http://Www.Mmo.Org.Tr/Mmo/Oda_Gorusleri/Otomotiv.Htm, 26 Eylül 2006.

Zhibin, Z. (2005), "An Efficient Sequential Quadratic Programming For Nonlinear Programming", Journal of Computational & Applied Mathematics, Vol.175, Issue , March 2005, s.447,18.