Araştırma Makalesi / Research Article

Ardıl-k Sistemler için Önerilen Güvenilirlik Sınırlarının Karşılaştırılması

Ahmet DEMİRALP[*1], Mehmet GÜNGÖR[2]

[1]*Harran Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Şanlıurfa, Türkiye*
[2]*İnönü Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Malatya, Türkiye*
(ORCID: 0000-0002-0981-7215) (ORCID: 0000-0001-6869-4043)

Öz
Hızla gelişen teknolojik gelişmeler, birçok karmaşık yapıya sahip sistemlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Ortaya çıkan bu sistemler, hem karmaşık yapıda hem de yüksek boyutlu bileşenlerden oluştuğu için bu sistemlerin tam güvenilirliklerini hesaplamak her zaman kolay olmamaktadır. Tam güvenilirlik değerlerinin hesaplanması zor ya da mümkün olmayan sistemlerin güvenilirliklerinin belirlenmesi için araştırmacılar, güvenilirlik sınırları kavramını geliştirmişlerdir. Bu çalışmada, ardıl-k sistemler olarak bilinen n-den ardıl k-çıkışlı sistemler için önerilen sınır yaklaşım yöntemlerinin karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda hem söz konusu sistemleri oluşturan bileşenlerin diziliş şekillerine göre doğrusal ve dairesel olarak hem de başarılı ve hatalı olma durumlarına göre adlandırılan sistemler incelenmiştir. Önerilen yöntemlerin bazı n, k ve p (q) değerleri için elde edilen sonuçları, tam güvenilirlik değerleriyle karşılaştırılarak tablolar halinde verilmiştir. Buradan elde edilen sonuçlardan güvenilirlik sınırlarının, sadece n ve k değerlerine bağlı olmayıp aynı zamanda p'nin seçildiği aralığa da bağlı olduğu belirlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Doğrusal (dairesel) n-den ardıl k-çıkışlı sistem, Başarılı ve hatalı sistem, Sistem güvenilirliği, Alt ve üst sınır yaklaşımları.

Comparison of the Recommended Reliability Bounds for Consecutive-k Systems

Abstract
Rapidly developing technological developments have led to the emergence of systems with many complex structures. It is not always easy to calculate the exact reliability of these systems since these systems are composed of both complex and high-dimensional components. In order to determine the reliability of systems, which are difficult or impossible to calculate exact reliability values, researchers have developed the concept of reliability bounds. In this study, it is aimed to compare the boundary approximation methods proposed for consecutive-k-out-of-n systems, known as consecutive-k systems. In this direction, systems that are named both linear and circular according to the arrangement of the components that make up the said systems and according to their good and failure conditions were examined. The results obtained for some n, k and p (q) values of the proposed methods are given in tables by comparing them with exact reliability values. From the results obtained here, it was showed the bounds of reliability are not only dependent on the n and k values, but also on the range from which p is chosen.

Keywords: Linear (circular) consecutive k-out-of-n system, Good and failure system, System reliability, Lower and upper boundary approximations.

1. Giriş

Ardıl-k sistemler olarak bilinen n-den ardıl k-çıkışlı sistem modelleri, güvenilirlik değerlendirmesi ve entegre devre, telekomünikasyonda mikrodalga röle istasyonları, petrol boru hattı sistemleri, hızlandırıcılarda vakum sistemleri, bilgisayar halka ağları ve uzay aracı röle istasyonlarının dizaynı gibi

*Sorumlu yazar: *ahmt.dmrlp@gmail.com*
Geliş Tarihi: 25/05/2021, Kabul Tarihi: 12/08/2021

sistemler için önerilmiştir. Böyle sistemler, doğrusal (dairesel) olarak dizilmiş bileşenlerle ifade edilir [1].

Belirli şartlar altında tasarlanan sistemin çalışma olasılığına sistem güvenilirliği denir. Sistemler tasarlanırken eğer arızalı bileşenlerin sayısı veya düzeni belirli bir koşulu sağladığında sistemin arızalandığı tasarlanıyorsa F sistem, tersine çalışan bileşenlerin sayısı veya düzeni belirli bir koşulu sağladığında sistemin çalıştığı tasarlanıyorsa G sistem olarak adlandırılır. n bileşenin doğrusal (dairesel) olarak birbirlerine bağlı olduğu varsayımı altında sistemin hatalı olması için en az ardıl-k tane bileşenin hatalı olması gerekmektedir. Bu şekilde tanımlanan sisteme doğrusal (dairesel) n-den ardıl k-çıkışlı F sistem adı verilir ve kısaca Lin(Cir)/Con/k/n:F şeklinde gösterilir. Eğer sistem başarılı ise o zaman en az ardıl-k tane bileşenin başarılı olması gerekir. Bu tür sisteme doğrusal (dairesel) n-den ardıl k-çıkışlı G sistem denir ve kısaca Lin(Cir)/Con/k/n:G şeklinde gösterilir. Doğrusal ardıl sistemlerde bileşenler 1'den n'ye kadar bir doğru boyunca sıralanırken, dairesel sistemlerdeki bileşenlerin ise 1'den n'ye doğru saat yönünde dairesel olarak sıralandığı varsayılır [1].

Ardıl k-çıkışlı G sistemler ile ilgili ilk çalışma, Tong [2] tarafından 1985'de verilmiştir. Günümüzdeki haliyle ifade edilen Con/k/n:G sistem kavramı ise Kuo vd. [3] tarafından ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Hem doğrusal hem de dairesel G sistemlerin tam güvenilirlik hesaplamaları ile çalışmalar, Kuo vd. [3] ve Zuo ve Kuo [6] tarafından verilmiştir.

Ardıl-k çıkışlı F sistemler ile ilgili ilk çalışma, Kontoleon [4] tarafından verilmiştir. Yazar bu çalışmada, F sistemlerin sadece numara algoritmasını vererek n-den ardıl r-çıkışlı F sistem olarak tanımlamıştır. Ancak literatürdeki adıyla kullanımını Chiang ve Niu [5], özel olarak n-den ardıl 2-çıkışlı F sistemlerin güvenilirliğinin hesaplanması için yinelemeli denklemlerden oluşan bir yöntem önermişlerdir. Bu çalışma, daha sonraki yapılacak çalışmalar için başvuru kaynağı olarak kullanılmaya başlanmıştır. Shanthikumar [7], Derman vd. [8], Bollinger ve Salvia [9], Bollinger [10], Chao ve Lin [11], Lambiris ve Papastavridis [12], Fu [13], Antonopoulou ve Papastavridis [14], Chan vd. [15], Kuo vd. [3], Kuo ve Zuo [1], Peköz ve Ross [16], Cluzeau [17] ve Gökdere vd. [18] gibi yazarlar çalışmalarında bileşenlerin özdeş ve bağımsız dağıldığı ve aynı bileşen güvenilirliğine sahip olma varsayımları altında doğrusal ve dairesel F sistemlerin güvenilirliklerinin hesaplanması için çeşitli yöntemler önermişlerdir. Ayrıca, son zamanlarda ardıl k-çıkışlı sistemlerin farklı varsayımlar altında incelendiği çalışmalar da mevcuttur [19-21].

Gelişen teknoloji ile birlikte ortaya çıkan birçok karmaşık yapıdaki sistemlerin güvenilirliğini hesaplamak hem maliyet açısından hem de zaman açısından her zaman kolay olmamaktadır. Bu nedenle yüksek boyutlu karmaşık yapıdaki sistemlerin güvenilirliğini hesaplamak yerine bu güvenilirlik değerine yaklaşık sonuçlar veren alt ve üst sınır yaklaşımları geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, hem doğrusal ve dairesel hem de G ve F sistemler için literatürde önerilen alt ve üst sınır yaklaşım yöntemlerini bir araya getirerek yöntemlerin birbirlerine olan üstünlüklerini göstermeyi amaçladık. Çalışmamızın ikinci kısmında, Lin(Cir)/Con/k/n:G ve Lin(Cir)/Con/k/n:F sistemlerin hem güvenilirlik hesaplamaları hem de sınır yaklaşımları üzerinde durulmuştur. Üçüncü kısımda ise önerilen sınır yaklaşım yöntemlerinin bazı n, k ve p (q) değerlerine karşılık gelen sonuçları elde edilerek tam güvenilirlikle beraber tablolarda karşılaştırılmıştır. Son kısımda ise elde edilen veriler ışığında yapılan çalışma özetlenmiştir.

2. Materyal ve Metot

2.1. Sistemlerin Güvenilirlik Değerlendirmesi

Ardıl sistem modelleri, güvenilirlik değerlendirmesi ve entegre devre, telekomünikasyonda mikrodalga röle istasyonları, petrol boru hattı sistemleri, hızlandırıcılarda vakum sistemleri, bilgisayar halka ağları ve uzay aracı röle istasyonlarının dizaynı gibi sistemler için önerilmiştir. Böyle sistemler, doğrusal (dairesel) olarak dizilmiş bileşenlerle ifade edilir.

Hem G hem de F sistemlerin güvenilirlik değerlendirmeleri için önerilen yöntemlerden en iyi sonuçları verenlerin yinelemeli denklemlerle verilen yöntemler olduğu sonucuna varılmıştır [1,3,14]. Bu çalışmada kullanılan yinelemeli denklemlerin iteratif bir çözüm tekniği olduğundan bir önceki adımın hem güvenilirlik hem de güvenilmezliğini kullanması açısından tercih edilmiştir. Ardıl-$\boldsymbol{k}$ sistemlerin tam güvenilirliklerinin hesaplanması için literatürde yer alan yöntemlerden bazıları ise ele alınan değerler için hatalı sonuçlar verdikleri gözlenmiştir. Bu çıkarıma literatürde kabul görmüş çalışmaların sonuçları ile kıyaslayarak varılmıştır. Söz konusu ele alınan yöntemlerin formülasyonları aşağıdaki Tablo 1'de verilmiştir. Burada, $\boldsymbol{R_{LG}}$ doğrusal G sistemin tam güvenilirliğini, $\boldsymbol{R_{CG}}$ doğrusal G sistemin tam güvenilirliğini, $\boldsymbol{R_{LF}}$ doğrusal F sistemin tam güvenilirliğini ve $\boldsymbol{R_{CF}}$ ise dairesel F sistemin tam güvenilirliğini göstermektedir.

Tablo 1. Sistemlerin Güvenilirliklerinin Değerlendirme Yöntemleri

Yazar(lar)	Sistem	Yöntem
Kuo vd. [3] ve Hwang [22]	Doğrusal $\boldsymbol{n}$-den ardıl $\boldsymbol{k}$-çıkışlı G sistem	$\boldsymbol{R_{LG}(n,k)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{n<k} \\ \boldsymbol{p^k}, & \boldsymbol{n=k} \\ \boldsymbol{R_{LG}(n-1,k)+Q_{LG}(n-1-k,k)qp^k}, & \boldsymbol{n>k} \end{cases}$
Antonopoulou ve Papastavridis [14] ve Kuo vd. [3]	Dairesel $\boldsymbol{n}$-den ardıl $\boldsymbol{k}$-çıkışlı G sistem	$R_{CG}(n,k) = \begin{cases} 0, & n<k \\ p^k, & n=k \\ p^k+kqp^k, & n=k+1 \\ qR_{LG}(n-1,k)+pR_{CG}(n-1,k) & \\ +kq^2p^kQ_{LG}(n-k-2,k), & n>k+1 \end{cases}$
Kuo ve Zuo [1]	Doğrusal $\boldsymbol{n}$-den ardıl $\boldsymbol{k}$-çıkışlı F sistem	$\boldsymbol{R_{LF}(n,k)} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{n<k} \\ \boldsymbol{1-q^k}, & \boldsymbol{n=k} \\ \boldsymbol{R_{LF}(n-1,k)-pq^kR_{LF}(n-1-k,k)}, & \boldsymbol{n>k} \end{cases}$
Kuo ve Zuo [1]	Dairesel $\boldsymbol{n}$-den ardıl $\boldsymbol{k}$-çıkışlı F sistem	$\boldsymbol{R_{CF}(n,k)} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{n<k} \\ \boldsymbol{1-q^k}, & \boldsymbol{n=k} \\ \boldsymbol{1-q^n-npq^k}, & \boldsymbol{n\le 2k+1} \\ \boldsymbol{pR_{LF}(n-1,k)+qR_{CF}(n-1,k)} & \\ \boldsymbol{-kp^2q^kR_{LF}(n-k-2,k)}, & \boldsymbol{n>2k+1} \end{cases}$

2.2. Sistemlerin Güvenilirlik Sınırlarının Hesaplanması

Bir sistemin tam güvenilirliğinin veya güvenilmezliğinin değerlendirilmesi için önerilen yöntemlerin çoğu basit yapıda ve küçük boyutlu sistemler için kullanışlı olabiliyorken bu durum karmaşık yapıda ve büyük boyutlu sistemler için içinden çıkılmaz bir hale dönüşebilmektedir. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için geliştirilen sınır yaklaşım yöntemleri bu kısımda verilecektir. İlk olarak G sistemlerin hem doğrusal hem de dairesel durumları için önerilen alt ve üst sınır yaklaşım yöntemleri verilecektir. Daha sonra F sistemlerin doğrusal ve dairesel durumları için önerilen alt ve üst sınır yaklaşım yöntemleri kronolojik olarak verilecektir. Ele alınan sınır yaklaşım yöntemlerinin hepsinde bileşenlerin özdeş ve bağımsız dağılım gösterdikleri ve aynı güvenilirlik olasılığına sahip oldukları kabul edilmektedir.

2.2.1. Doğrusal (Dairesel) $\boldsymbol{n}$-den Ardıl $\boldsymbol{k}$-çıkışlı G Sistemler İçin Sınır Yaklaşımları

Kuo vd., tarafından doğrusal sistemler için önerilen alt ve üst sınır yaklaşım yöntemleri,

$$1-\left(1-p^k\right)^{[n/k]} \le R_{LG}(n,k) \le 1-\left(1-p^k\right)^{n-k+1} \tag{1}$$

(1) eşitliğindeki gibidir ve burada [a] ifadesi a'ya eşit ya da küçük en büyük tamsayı şeklinde tanımlanmıştır [3].

Daha sonra, Zuo [23] tarafından doğrusal sistemler için önerilen alt ve üst sınır yaklaşımı aşağıdaki gibidir.

$$1-(1-p^k)^{[n/k]} \le R_{LG}(n,k) \le \prod_{i=1}^{k}(1-q^{m_i+1}) \tag{2}$$

Burada $m_i = [(n-i)/k]$'dır. (1) ve (2) ile verilen eşitsizliklerden iki alt sınırın aynı olduğu görülmektedir.

Kuo vd., dairesel G sistemler için ise (3) eşitsizliği ile verilen alt ve üst sınır yaklaşımını önermişlerdir [3].

$$1-\left(1-p^k\right)^{[n+k-1/k]} \le R_{CG}(n,k) \le 1-\left(1-p^k\right)^{n} \tag{3}$$

2.2.2. Doğrusal (Dairesel) $\boldsymbol{n}$-den Ardıl $\boldsymbol{k}$-çıkışlı F Sistemler İçin Sınır Yaklaşımları

İlk olarak Chiang ve Niu tarafından aşağıdaki alt ve üst sınır yaklaşımları önerilmiştir [5].

$$(1-q^k)^{n-k+1} \leq R_{LF}(n,k) \leq \left(1-q^k\right)^{[n/k]} \tag{4}$$

Salvia ise, alt ve üst sınır yaklaşım yöntemi olarak (5) ile ifade edilen eşitsizliği önermiştir [24].

$$1-(n-k+1)q^k \leq R_{LF}(n,k) \leq 1-(n-k+1)p^{n-k}q^k \tag{5}$$

Aynı yıl Derman vd. doğrusal hatalı sistem için üst sınır yöntemi olarak,

$$R_{LF}(n,k) \leq 1-A/B \tag{6}$$

eşitliğini önermişlerdir ve burada,

$A=(n-k+1)^2q^{2k}$ ve $B=(n-k+1)^2q^k+\sum_{j=k+1}^{\min(2k,n)}(n-j+1)q^j+\binom{n-2k+1}{2}q^{2k}$'dır [8].

Fu tarafından, üst sınır yaklaşımı için aşağıdaki yöntemi önerilmiştir [25].

$$R_{LF}(n,k) \leq \left(1-pq^k\right)^{n-k+1} \tag{7}$$

Papastavridis [26], bileşen hata olasılığı q'nun $k/(k+1)$'den az olması koşulu ile alt ve üst sınır yaklaşımı için (8) ile verilen eşitsizliği önermiştir.

$$bm^{n+1}-e < R_{LF}(n,k) < aM^{n+1}+e \tag{8}$$

Burada, $m=1-\frac{pq^k}{(1-q^k)^k}, M=1-pq^k,\ a=\frac{m^k-q^k}{m^k-(k+1)pq^k}\ ,\ b=\frac{M^k-q^k}{M^k-(k+1)pq^k}\ ,\ e=\frac{2(k-1)q^{n+2}}{p(k+(k+1)q)}$ şeklindedir.

Papastavridis [27], fonksiyon üretme tekniğini kullanarak alt ve üst sınır yaklaşımı olarak (9) ile verilen aşağıdaki eşitsizliği önermiştir.

$$\left|R_{LF}(n,k)-\left(1-pq^k\right)^n\right| < (k-1)q^n \tag{9}$$

Chrysaphinou ve Papastavridis [28], q yeterince küçük($q\sim\lambda/n^{1/k}$) seçildiğinde sınır yaklaşımları için aşağıdaki eşitsizliği vermişlerdir.

$$|R_{LF}(n,k)-\exp(-\lambda_n)| \leq (2k-1)q^k+2(k-1)q \tag{10}$$

Burada, $\lambda_n \equiv (n-k+1)q^k$'dır.

Barbour vd. [29], Stein-Chen yöntemini kullanarak (10) ile verilen eşitsizlikten yola çıkarak aşağıdaki eşitsizliği vermişlerdir.

$$|R_{LF}(n,k)-\exp(-p\lambda_n)| \leq (2kp-1)q^k \tag{11}$$

Bu eşitsizlikte, $\lambda_n \equiv (n-k+1)q^k$'dır.

Papastavridis ve Koutras [30], $m=k\geq 2$ için alt ve üst sınır yaklaşımlarını önermişlerdir. Önerdikleri alt sınır yaklaşımı, (4) eşitsizliğinde önerilen yaklaşımla aynı olup üst sınır yaklaşımı aşağıdaki gibidir.

$$R_{LF}(n,k) \leq \prod_{i=k}^{n}\left(1-p_{i-k}Q_{k,i}\right) \tag{12}$$

olup, burada $q_0 \equiv 0$ ve $Q_{k,i} \equiv \prod_{j=i-k+1}^{i} q_j$ şeklindedir.

Zuo [23], aşağıda (13) eşitsizliği ile verilen alt ve üst sınır yaklaşımlarını önermiştir.

$$1-\prod_{i=1}^{k}(1-p^{m_i+1}) \leq R_{LF}(n,k) \leq \left(1-q^k\right)^{[n/k]} \tag{13}$$

Burada, $m_i=[(n-i)/k]$'dır.

Barbour vd. [31], (11)'de verilen eşitsizliği Poisson dağılımı için Stein yöntemini kullanarak iyileştirmişlerdir ve aşağıda verilen alt ve üst sınır yaklaşımlarını önermişlerdir.

$$\vartheta - \varepsilon_1 \leq R_{LF}(n,k) \leq \vartheta + \varepsilon_1 \tag{14}$$

Burada,

$\vartheta = e^{-(n-k+1)pq^k} - q^{k+1}e^{-(n-2k)pq^k}$ ve

$\varepsilon_1 = \left\{1 - e^{-(n-k+1)pq^k} + q^{k+1}\left(1 - e^{-(n-2k)pq^k}\right)\right\}(2k+1)pq^k$ dır.

Barbour vd. [31], $q \leq 1/3$ ve $n > 3k - 2$ olmak üzere bileşik Poisson yaklaşımını kullanarak alt ve üst sınır yaklaşımını aşağıdaki gibi önermişlerdir.

$$\exp(-\mu) - \varepsilon_2 \leq R_{LF}(n,k) \leq \exp(-\mu) + \varepsilon_2 \tag{15}$$

Burada,

$$\varepsilon_2 = q^{2k}[(6k-5)n - (k-1)(13k-9)]$$

$$\mu = (n-k+1)q^k - (n-k)q^{(k+1)} - 2(n-k+2)q^{(2k-1)} + 2(n-2)q^{2k} + \frac{2k(n-k+2)}{2k-1}q^{(3k-2)}$$
$$-(n+k-4)q^{(3k-1)} + [2k(n-k+2) - 2(2k-1)$$
$$*(n-k+1)q + 2(k-1)(n-k)q^2]q^{(k-1)}h(q,k)$$

$h(q,k) = \sum_{i=k}^{2k-2} q^i/_i$'dır.

Muselli [32] tarafından önerilen alt sınır yaklaşımı (4) ile verilen eşitsizlik ile aynı olup üst sınır yaklaşımı ise aşağıdaki gibidir.

$$R_{LF}(n,k) \leq \left(1 - q^k\right)^{\lfloor n/k \rfloor} \tag{16}$$

Burada $\lfloor a \rfloor$, a'dan büyük olmayan tam sayı şeklinde tanımlanmıştır.

Xie ve Lai [33], küçük k değerleri için koşullu yaklaşımın iyi sonuçlar vereceği beklentisi altında aşağıdaki üst sınır yaklaşımını önermişlerdir.

$$R_{LF}(n,k) \leq \left(1 - q^k\right)\left[1 - \frac{(1-q)q^k}{1-q^k}\right]^{n-k} \tag{17}$$

Muselli [34-35], birkaç alt ve üst sınır yaklaşım yöntemi önermişlerdir. Bu sınır yaklaşımları aşağıda verilmiştir.

$$(1-q^k)^{\lfloor (n-k) \rfloor + 1} \leq R_{LF}(n,k) \leq \left(1 - q^k\right)^{\left\lfloor \frac{n-k}{k} \right\rfloor + 1} \tag{18}$$

Daha sonra, $1 \leq k \leq n$ ve $0 < q < 1$ şartları altında alt ve üst sınır için aşağıdaki eşitsizliği vermiştir.

$$(1-q^k)^{((n-k)/h_L)+1} \leq R_{LF}(n,k) \leq (1-q^k)^{((n-k)/h_U)+1} \tag{19}$$

(19)'da verilen eşitsizlikte üst sınır yaklaşımını elde etmek için $h_U(n,k) = \frac{1-q^k}{p}$ yerine yazılır ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_{LF}(n,k) \leq (1-q^k)^{1+(\frac{p(n-k)}{1-q^k})} \tag{20}$$

Muselli [34], bir başka alt sınır yaklaşımı için, $k \geq \max(q/p\,,1)$ varsayımı altında (19) de verilen eşitsizlikte $h_L(n,k) = \frac{(1-q^k)^k}{p}$ yerine yazılarak aşağıdaki şekilde alt sınır yaklaşımı elde edilmiştir.

$$(1-q^k)^{1+(\frac{p(n-k)}{(1-q^k)^k})} \leq R_{LF}(n,k) \tag{21}$$

Muselli [34], bir başka alt sınır yaklaşımı için, $k \geq \max(q/p\,,1)$ olmak üzere eğer $\overline{h_L}(n,k) = (1-q^k)^k/p$ ise $h_L(n,k) = \frac{(1-q^k)^{k/(\overline{h_L}(n,k))}}{p}$ şeklinde önermişlerdir. (19) da verilen eşitsizlikte bu değerler yerine yazılarak aşağıdaki şekilde alt sınır yaklaşımı elde edilir.

$$(1-q^k)^{1+(p(n-k)/(1-q^k))^{kp/(1-q^k)^k}} \leq R_{LF}(n,k) \tag{22}$$

Muselli [35] tarafından önerilen bir başka alt sınır yaklaşımı, $1 \leq k \leq n - h(n,k)$ şartı altında

$$(1-q^k)^{n-k+1-l(n,k)(h(n,k)-1)} \leq R_{LF}(n,k) \tag{23}$$

şeklinde olup, burada $l(n,k) = \left\lfloor \frac{n-k}{h(n,k)+1} \right\rfloor$ ve $h(n,k) = \left\lfloor \frac{1-q^k}{p} \right\rfloor$'dır.

Muselli [35] tarafından önerilen son alt sınır yaklaşımı aşağıdaki gibidir.

$$(1-q^k)^{2l'(n,k)} \leq R_{LF}(n,k) \tag{24}$$

Burada, $l'(n,k) = \left\lceil \frac{n-k+1}{h(n,k)+1} \right\rceil$ ve $\lceil a \rceil$, a'dan küçük olmayan tam sayıdır.

Däuş ve Beiu [36], $1/(n-k) > pq^k$ varsayımı altında aşağıdaki alt ve üst sınır yaklaşım ailesini önermişlerdir.

$$L_r \leq R_{LF}(n,k) \leq U_r \tag{25}$$

Burada, her $r = 0,1,\ldots,\lfloor (n-2k-1)/(2k+2) \rfloor$ için

$$L_r = \sum_{j=0}^{2r+1} (-1)^j C_{n-jk}^{j} (pq^k)^j - q^k \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j C_{n-k-jk}^{j} (pq^k)^j$$

ve

$U_r = \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j C_{n-jk}^{j} (pq^k)^j - q^k \sum_{j=0}^{2r+1} (-1)^j C_{n-k-jk}^{j} (pq^k)^j$'dir.

Son olarak, dairesel hatalı sistemler için önerilen sınır yaklaşımları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Kuo ve Zuo [1], doğrusal hatalı sistemler için (4) eşitliği ile verilen alt ve üst sınır yaklaşımını düzenleyerek dairesel hatalı sistemler için aşağıdaki şekilde vermişlerdir.

$$(1-q^k)^n \leq R_{CF}(n,k) \leq \left(1-q^k\right)^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \tag{26}$$

Derman vd. [8] çalışmalarında verdikleri teoremden dairesel hatalı sistemler için aşağıdaki üst sınır yaklaşımını önermişlerdir.

$$R_{CF}(n,k) \leq 1 - A/B \tag{27}$$

Burada, $A = nq^k$ ve $B = (1 + (n-2k+1)q^k + 2q(1-q^{k-1}))/p$ şeklindedir.

Papastavridis [26], q'nun $k/(k+1)$'den az olduğu kısıtlaması altında dairesel sistemler için aşağıdaki alt ve üst sınır yaklaşımlarını önermiştir.

$$m^n - (k-1)q^n < R_{CF}(n,k) < M^n + (k-1)q^n \tag{28}$$

Burada, $m = 1 - \frac{pq^k}{(1-q^k)^k}$ ve $M = 1 - pq^k$ şeklindedir.

3. Bulgular ve Tartışma

3.1. Önerilen Sınır Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Bu çalışmada literatürde son kırk yılda önerilmiş olan sınır yaklaşım metotları verilmeye çalışılmıştır ama incelenen bazı yöntemler için elde edilen sonuçların tam güvenilirlik değerine göre çok kötü sonuçlar verdiği tespit edildiğinden bu çalışmada bazı sınır yaklaşım yöntemlerine değinilmemiştir [37-38].

İncelenen sınır yaklaşım yöntemleri R programı kullanılarak hesaplanmıştır. Sınır yaklaşım yöntemlerini karşılaştırmak için ele alınan yöntemler ile tam güvenilirliğin bazı $n,\ k$ ve $p\ (q)$ için değerleri hesaplanacaktır. Elde edilen yaklaşık değerlerin tam güvenilirlik değerine ne kadar yakın sonuçlar verdiğini görmek için aşağıdaki hata normundan yararlandık.

$$\|e\|_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\left|1 - \frac{Alt(\ddot{U}st)\ Sınır\ yaklaşımı}{Tam\ güvenilirlik}\right|$$

Hata normundaki mutlak değer içindeki ifade bağıl hata hesabıdır. Dolayısıyla bu hata normu sıfıra ne kadar yakınsa hesaplanan yaklaşım değerinin, tam güvenilirliğe o kadar yakın olduğunu söyleyebilmemiz mümkün olacaktır.

Bu bağlamda ilk olarak doğrusal G sistemler için önerilen sınır yaklaşımlarının ve tam güvenilirlik değerinin sonuçları, Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Doğrusal G sistemlerin güvenilirliği için alt/üst sınır yaklaşımlarının karşılaştırılması

n	k	p	Kuo vd. [3] ve Zuo [23] Alt Sınır	Kuo vd. [3] Üst Sınır	Zuo [23] Üst Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	0.1	0.0490010	0.0864828	0.1676984	0.0802528
50	3	0.1	0.0158806	0.0468891	0.5656197	0.0425025
100	4	0.1	0.0024970	0.0096536	0.7423101	0.0087053
10	2	0.3	0.3759679	0.5720702	0.6921075	0.5035884
50	3	0.3	0.3546349	0.7312080	0.9920449	0.6247576
100	4	0.3	0.1839867	0.5456554	0.9994637	0.4326308
10	2	0.5	0.7626953	0.9249153	0.9384766	0.8593750
50	3	0.5	0.8819329	0.9983542	0.9999695	0.9827454
100	4	0.5	0.8008034	0.9980892	0.9999999	0.9727150
10	2	0.7	0.9654975	0.9976658	0.9951459	0.9859216
50	3	0.7	0.9987948	1.0000000	0.9999999	0.9999847
100	4	0.7	0.9989555	1.0000000	1.0000000	0.9999964
10	2	0.9	0.9997524	0.9999997	0.9999800	0.9999372
50	3	0.9	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9999999
100	4	0.9	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
	Hata Normu ($\|e\|_1$)		0.2269600	0.0658415	6.6725384	

Tablo 2'ye göre ilk olarak hem Kuo vd.'nin önerdiği alt sınır ile Zuo'nun önerdiği alt sınır yaklaşım yöntemleri aynı olduğundan bu alt sınır tek bir sütunda verilmiş olup, n=10, 50 ve 100 değerleri ve p'nin de 0.5 den büyük değerleri aldığında alt sınırın tam güvenilirliğe yaklaştığı görülmektedir ayrıca hata normundan elde edilen değer bu durumu desteklemektedir. Kuo vd. tarafından önerilen üst sınır yaklaşımı ise p'nin değerleri için n=10, 50 ve 100 değerleri için tam güvenilirliğe yakın sonuçlar aldığı gözlenmektedir. Zuo tarafından önerilen üst sınır yaklaşımının ise n'nin verilen değerleri ile $p > 0.7$ değerleri için tam güvenilirlikle yakın sonuçlar verdiği, $p < 0.7$ değerleri için ise tam güvenilirlikten uzak değerler aldığı belirlenmiştir. Hata normuna bakarak ise Kuo vd. tarafından önerilen üst sınır yaklaşım yönteminin Zuo tarafından önerilen yaklaşımdan daha iyi olduğunu söyleyebiliriz.

Dairesel G sistemler için önerilen sınır yaklaşımları sadece Kuo vd. tarafından önerilen yöntemler olup bunların tam güvenilirlikle karşılaştırmalı sonuçları Tablo 3'de yer almaktadır.

Tablo 3. Dairesel G sistemlerin güvenilirliği için alt/üst sınır yaklaşımlarının karşılaştırılması

n	k	p	Kuo vd. [3] Alt Sınır	Kuo vd. [3] Üst Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	0.1	0.0490100	0.0956179	0.0879823
50	3	0.1	0.0168647	0.0487944	0.0441387
100	4	0.1	0.0024970	0.0099507	0.0089632
10	2	0.3	0.3759679	0.6105839	0.5332814
50	3	0.3	0.3720598	0.7455268	0.6374288
100	4	0.3	0.1839867	0.5566068	0.4412462
10	2	0.5	0.7626953	0.9436865	0.8798828
50	3	0.5	0.8966913	0.9987399	0.9848305
100	4	0.5	0.8008034	0.9984256	0.9750060
10	2	0.7	0.9654975	0.9988096	0.9897878
50	3	0.7	0.9992082	1.0000000	0.9999889
100	4	0.7	0.9989555	1.0000000	0.9999973
10	2	0.9	0.9997524	0.9999999	0.9999679
50	3	0.9	1.0000000	1.0000000	0.9999999
100	4	0.9	1.0000000	1.0000000	1.0000000
Hata Normu ($\|e\|_1$)			0.2336367	0.0665493	

Tablo 3'de elde edilen sonuçlara göre $p > 0.5$ değerleri için n ve k'nın hem büyük hem de küçük değerleri için hem alt sınır yaklaşımının hem de üst sınır yaklaşımının tam güvenilirlikle uyum içinde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca hem alt sınır yaklaşımının hem de üst sınır yaklaşımının tam güvenilirlik için uygun bir sınır oluşturduğunu hata normlarına bakarak söyleyebiliriz.

Doğrusal F sistemler için önerilen sınır yaklaşımları için elde edilecek sonuçlar hem alt sınır hem de üst sınır için ayrı ayrı tablolarda verilecektir. Önerilen yaklaşımlardan bazıları birbirleri ile aynı olduğundan bu yaklaşımlar tek bir sütunda verilmiştir. (25) denklem numarası ile önerilen alt ve üst sınır yaklaşımı r=0, 1 değerleri için üretilmiş olup alt sınırlar L_0 ve L_1'dir. Bazı n, k ve q değerleri için elde edilen alt sınır yaklaşım sonuçları tam güvenilirlik değerinin karşılaştırması Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Doğrusal hatalı sistemlerin güvenilirliği için alt sınırların karşılaştırılması

n	k	q	Chiang ve Niu [5] Alt Sınır	Salvia [24] Alt Sınır	Papastavridis [26] Alt Sınır	Papastavridis [27] Alt Sınır	Chrysaphinou ve Papastavridis [28] Alt Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9991040	0.9991000	0.9991082	0.9990104	0.9788004	0.9991082
50	3	.01	0.9999520	0.9999520	0.9999525	0.9999505	0.9599470	0.9999525
100	4	.01	0.9999990	0.9999990	0.9999990	0.9999990	0.9399990	0.9999990
10	2	.05	0.9777237	0.9775000	0.9786141	0.9765022	0.8702512	0.9786201
50	3	.05	0.9940176	0.9940000	0.9943076	0.9940797	0.7933930	0.9943077
100	4	.05	0.9993939	0.9993937	0.9994239	0.9994064	0.6993502	0.9994239
10	2	0.1	0.9135172	0.9100000	0.9195841	0.9135589	0.6839312	0.9197472
50	3	0.1	0.9531109	0.9520000	0.9574845	0.9559781	0.5481338	0.9574975
100	4	0.1	0.9903464	0.9903000	0.9912943	0.9910400	0.3896469	0.9912946
10	2	0.3	0.4279298	0.1900000	0.4789593	0.5216642	-0.425142	0.4964116
50	3	0.3	0.2687920	-0.296000	0.3668359	0.3851801	-1.061376	0.3752424
100	4	0.3	0.4543446	0.2143000	0.5642625	0.5663101	-1.400899	0.5673692
10	2	0.5	0.0750847	-1.250000	0.0828944	0.2620990	-1.644601	0.1406250
50	3	0.5	0.0016458	-5.000000	0.0082479	0.0396793	-2.622521	0.0172546

100	4	0.5	0.0019108	-5.062500	0.0174373	0.0417995	-3.435171	0.0272849
Hata Normu($\|e\|_1$)			0.1956700	32.68373	0.0904445	0.3707075	20.250865	

Tablo 4.(Devamı) Doğrusal F sistemlerin güvenilirliği için alt sınırların karşılaştırılması

n	k	q	Barbour vd. [29] Alt Sınır	Zuo [23] Alt Sınır	Barbour vd. [31] Alt Sınır	Barbour vd. [31] Alt Sınır	Muselli [34] Alt Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9988134	0.9975980	0.9991080	0.9991078	0.9991082	0.9991082
50	3	.01	0.9999475	0.9963359	0.9999525	0.9999525	0.9999525	0.9999525
100	4	.01	0.9999990	0.9975632	0.9999990	0.9999990	0.9999990	0.9999990
10	2	.05	0.9718518	0.9488249	0.9784774	0.9783840	0.9786139	0.9786201
50	3	.05	0.9937287	0.8104359	0.9943053	0.9943286	0.9943077	0.9943077
100	4	.05	0.9993830	0.7273428	0.9994239	0.9994240	0.9994239	0.9994239
10	2	0.1	0.8961937	0.8323015	0.9177426	0.9157570	0.9196512	0.9197472
50	3	0.1	0.9533198	0.4343803	0.9573573	0.9578164	0.9574934	0.9574975
100	4	0.1	0.9906880	0.2576899	0.9912910	0.9912977	0.9912946	0.9912946
10	2	0.3	0.4052246	0.3078925	0.4097220	0.1124774	0.4898072	0.4964116
50	3	0.3	0.3172529	0.0079550	0.3206247	0.0247893	0.3731166	0.3752424
100	4	0.3	0.5396956	0.0005363	0.5538749	0.4757678	0.5668393	0.5673692
10	2	0.5	0.0746525	0.0615234	-0.197706	0.4757678	0.1100598	0.1406250
50	3	0.5	-0.200212	0.0000305	-0.395522	0.4757678	0.0127137	0.0172546
100	4	0.5	-0.139244	0.0000001	-0.229479	0.4757678	0.0240942	0.0272849
Hata Normu($\|e\|_1$)			1.3067534	0.4529987	2.4057021	3.1511600	0.0411650	

Tablo 4.(Devamı) Doğrusal F sistemlerin güvenilirliği için alt sınırların karşılaştırılması

n	k	q	Muselli [35] Alt Sınır	Muselli [35] Alt Sınır	L_0 Alt Sınır	L_1 Alt Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9991082	0.9990004	0.9991080	0.9991082	0.9991082
50	3	.01	0.9999525	0.9999520	0.9999525	0.9999525	0.9999525
100	4	.01	0.9999990	0.9999990	0.9999990	0.9999990	0.9999990
10	2	.05	0.9786139	0.9752794	0.9785000	0.9786201	0.9786201
50	3	.05	0.9943077	0.9940176	0.9942937	0.9943077	0.9943077
100	4	.05	0.9994239	0.9993877	0.9994238	0.9994239	0.9994239
10	2	0.1	0.9196512	0.9043821	0.9180000	0.9197472	0.9197472
50	3	0.1	0.9574934	0.9531109	0.9567000	0.9574974	0.9574975
100	4	0.1	0.9912946	0.9902474	0.9912600	0.9912947	0.9912946
10	2	0.3	0.4898072	0.3894161	0.4060000	0.4964116	0.4964116
50	3	0.3	0.3731166	0.2687920	0.0847000	0.3651967	0.3752424
100	4	0.3	0.5668393	0.4506644	0.4475800	0.5653806	0.5673692
10	2	0.5	0.1100598	0.0563135	-0.250000	0.1406250	0.1406250
50	3	0.5	0.0127137	0.0016458	-2.062500	-1.026367	0.0172546
100	4	0.5	0.0240942	0.0017914	-4.762500	-1.377441	0.0272849
Hata Normu ($\|e\|_1$)			0.0411654	0.2113080	20.00191	7.466505	

Tablo 4'de yer alan sonuçlarda (4) eşitliği ile önerilen alt sınır yaklaşım yöntemi ile (7), (12), (16), (18) ve (23) eşitlikleri ile önerilen alt sınır yaklaşım yöntemleri aynı olduğundan bu yaklaşımların hepsi tek bir sütunda Chiang ve Niu tarafından önerilen alt sınır yaklaşımının altında verilmiştir. Tablolardaki sonuçlar incelendiğinde ise Zuo tarafından önerilen yöntem hariç diğer yöntemlerin n ve k'nın değerlerine bağlı olmaksızın sadece q'nun çok küçük değerlerinde tam güvenilirlikle uyum içinde olduğu ve q'nun değeri arttıkça yöntemlerin performanslarının bozulduğu görülmektedir. Hata norm değerleri Salvia [24], Chrysaphinou ve Papastavridis [28], Barbour vd. [29], Barbour vd. [31] tarafından önerilen alt sınır yaklaşımları ile L_0 ve L_1 alt sınır yaklaşımlarının yüksek çıktığından diğerlerinden kötü performans göstermişlerdir.

Doğrusal F sistemlerle ilgili son olarak üst sınır yaklaşım yöntemlerinin karşılaştırılması verilecektir. Bunun için, (25) eşitliği ile verilmiş olan sınır yaklaşım yöntemlerinin ailesinde r=0 ve 1 değerleri verilerek üst sınır yaklaşım yöntemi olarak U_0 ve U_1 elde edilir. Chiang ve Niu tarafından (4) eşitliği ile önerilmiş olan üst sınır yaklaşım yöntemi ile (13) ve (16) eşitlikleri ile önerilen üst sınır yaklaşımı aynı olduğundan bu yöntemlerin sonuçları Chiang ve Niu'nun önerdiği yöntemin altında tek sütunda; Fu tarafından (7) eşitliği ile önerilen üst sınır yaklaşımı ile Papastavridis ve Koutras tarafından (12) eşitliği ile önerilen üst sınır yöntemi aynı olduğundan bunların sonuçları tek bir sütunda Fu'nun altında verilecektir. Geriye kalan üst sınır yaklaşım yöntemleri bazı n, k ve q değerleri için elde edilerek tam güvenilirlikle karşılaştırmalı olarak Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. Doğrusal F sistemlerin güvenilirliği için üst sınırların karşılaştırılması

n	k	q	Chiang ve Niu [5] Üst Sınır	Salvia [24] Üst Sınır	Derman vd. [8] Üst Sınır	Fu [25] Üst Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9995001	0.9991695	0.9999001	0.9991094	0.9991082
50	3	.01	0.9999840	0.9999701	0.9999990	0.9999525	0.9999525
100	4	.01	0.9999998	0.9999996	1.0000000	0.9999990	0.9999990
10	2	.05	0.9875623	0.9850730	0.9975144	0.9788269	0.9786201
50	3	.05	0.9980019	0.9994615	0.9998751	0.9943159	0.9943077
100	4	.05	0.9998438	0.9999956	0.9999938	0.9994242	0.9994239
10	2	0.1	0.9509900	0.9612580	0.9901316	0.9218556	0.9197472
50	3	0.1	0.9841194	0.9996607	0.9990027	0.9577012	0.9574975
100	4	0.1	0.9975030	0.9999996	0.9999001	0.9913076	0.9912946
10	2	0.3	0.6240321	0.9533051	0.9151536	0.5567450	0.4964116
50	3	0.3	0.6453651	0.9999999	0.9735306	0.4001633	0.3752424
100	4	0.3	0.8160133	1.0000000	0.9919643	0.5760533	0.5673692
10	2	0.5	0.2373047	0.9912109	0.7798913	0.3006578	0.1406250
50	3	0.5	0.1180671	1.0000000	0.8833240	0.0451462	0.0172546
100	4	0.5	0.1991966	1.0000000	0.9397828	0.0459765	0.0272849
Hata Normu ($\|e\|_1$)			0.9551788	6.8075142	6.1015954	0.2430356	

Tablo 5.(Devamı) Doğrusal F sistemlerin güvenilirliği için üst sınırlarının karşılaştırılması

n	k	q	Papastavridis [26] Üst Sınır	Papastavridis [27] Üst Sınır	Chrysaphinou ve Papastavridis [28] Üst Sınır	Barbour vd. [29] Üst Sınır	Barbour vd. [31] Üst Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9991084	0.9990104	1.0194000	0.9994054	0.9991088	0.9991082
50	3	.01	0.9999525	0.9999505	1.0399570	0.9999574	0.9999525	0.9999525
100	4	.01	0.9999990	0.9999990	1.0599990	0.9999991	0.9999990	0.9999990
10	2	.05	0.9787429	0.9765022	1.0852510	0.9858518	0.9789798	0.9786201
50	3	.05	0.9943099	0.9940797	1.1946430	0.9949037	0.9943147	0.9943077
100	4	.05	0.9994239	0.9994064	1.2994380	0.9994655	0.9994239	0.9994239
10	2	0.1	0.9214575	0.9135589	1.1439310	0.9481937	0.9247499	0.9197472
50	3	0.1	0.9576168	0.9559781	1.3581340	0.9621198	0.9578901	0.9574975
100	4	0.1	0.9912979	0.9910400	1.5910470	0.9919280	0.9913051	0.9912946
10	2	0.3	0.5616151	0.5216760	1.3148580	0.7292246	0.6877247	0.4964116
50	3	0.3	0.3991545	0.3851801	1.6086240	0.4900529	0.4796283	0.3752424
100	4	0.3	0.5751219	0.5663101	2.3125010	0.6142156	0.5971516	0.5673692
10	2	0.5	0.3556076	0.2640521	1.8553990	0.5746525	0.7289202	0.1406250
50	3	0.5	0.0465852	0.0396793	2.6274790	0.2997871	0.4871055	0.0172546
100	4	0.5	0.0459833	0.0417995	3.4398290	0.2357553	0.3224637	0.0272849
Hata Normu ($\|e\|_1$)			0.2749861	0.1866420	19.903422	1.8669002	2.8636400	

Tablo 5.(Devamı) Doğrusal F sistemlerin güvenilirliği için üst sınırların karşılaştırılması

n	k	q	Barbour vd. [31] Üst Sınır	Xie ve Lai [33] Üst Sınır	Muselli [34] Üst Sınır	U_0 Üst Sınır	U_1 Üst Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9991089	0.9991083	0.9991083	0.9999001	0.9991082	0.9991082
50	3	.01	0.9999525	0.9999525	0.9999525	0.9999990	0.9999525	0.9999525
100	4	.01	0.9999990	0.9999990	0.9999990	1.0000000	0.9999990	0.9999990
10	2	.05	0.9790465	0.9786576	0.9786565	0.9975356	0.9786201	0.9786201
50	3	.05	0.9943471	0.9943090	0.9943090	0.9998757	0.9943077	0.9943077
100	4	.05	0.9994241	0.9994239	0.9994239	0.9999938	0.9994239	0.9994239
10	2	0.1	0.9263570	0.9202497	0.9202189	0.9905400	0.9197501	0.9197472
50	3	0.1	0.9589964	0.9575648	0.9575627	0.9990396	0.9574990	0.9574975
100	4	0.1	0.9913332	0.9912968	0.9912968	0.9999008	0.9912947	0.9912946
10	2	0.3	0.9710774	0.5125987	0.5093173	0.9440200	0.4974117	0.4964116
50	3	0.3	0.8850093	0.3870102	0.3856319	0.9954532	0.3802115	0.3752424
100	4	0.3	0.7081584	0.5720823	0.5717048	0.9961253	0.5680150	0.5673692
10	2	0.5	3.5601270	0.1744260	0.1617042	0.9375000	0.1484375	0.1406250
50	3	0.5	9.3305910	0.0268737	0.0242387	1.2187500	-0.483398	0.0172546
100	4	0.5	7.0049860	0.0361858	0.0344271	1.1171880	-0.936401	0.0272849
Hata Normu ($\|e\|_1$)			54.825539	0.0797998	0.0585584	7.9140582	4.293796	

Tablolara göre Chrysaphinou ve Papastavridis tarafından önerilen yaklaşım hariç diğer tüm yaklaşımların q'nun küçük değerleri için tam güvenilirlikle yakın değerler aldığı gözlenmiştir. Birkaç yöntem dışındaki diğer yöntemlerin ise q'nun değeri arttırıldığında yaklaşımlar için elde edilen değerlerin tam güvenilirlikten uzak bir görüntü çizdiği sonucuna varılmıştır. Hata norm değerleri Salvia [24], Derman vd. [8], Chrysaphinou ve Papastavridis [28], Barbour vd. [29] ve Barbour vd. [31] tarafından önerilen alt sınır yaklaşımları ile U_0 ve U_1 sınır yaklaşımlarının yüksek çıktığından diğer yöntemlere kıyasla kötü performans göstermişlerdir.

Son olarak, dairesel hatalı sistemler için önerilen alt ve üst sınır yaklaşımları bazı n, k ve q değerleri için Tablo 6'da karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Tablo 6. Dairesel F sistemlerin güvenilirliği için alt ve üst sınırların karşılaştırılması

n	k	q	Kuo ve Zuo [1] Alt Sınır	Papastavridis [26] Alt Sınır	Kuo ve Zuo [1] Üst Sınır	Derman vd. [8] Üst Sınır	Papastavridis [26] Üst Sınır	Tam Güvenilirlik
10	2	.01	0.9990004	0.9990102	0.9995001	0.9990201	0.9990104	0.9991091
50	3	.01	0.9999500	0.9999505	0.9999840	0.9999510	0.9999505	0.9999515
100	4	.01	0.9999990	0.9999990	0.9999998	0.9999990	0.9999990	0.9999990
10	2	.05	0.9752794	0.9763856	0.9875623	0.9775281	0.9765022	0.9787323
50	3	.05	0.9937691	0.9940775	0.9980019	0.9943713	0.9940797	0.9941957
100	4	.05	0.9993752	0.9994064	0.9998438	0.9994348	0.9994064	0.9994123
10	2	0.1	0.9043821	0.9118757	0.9509900	0.9200000	0.9135589	0.9205421
50	3	0.1	0.9512056	0.9558487	0.9811940	0.9604117	0.9559781	0.9567256
100	4	0.1	0.9900493	0.9910364	0.9975030	0.9918772	0.9910400	0.9911260
10	2	0.3	0.3894161	0.4532612	0.6240321	0.5609756	0.5216760	0.5072686
50	3	0.3	0.2544732	0.3546788	0.6453651	0.5409725	0.3851801	0.3702227
100	4	0.3	0.4433932	0.5557309	0.8160133	0.6849597	0.5663101	0.5620428
10	2	0.5	0.0563135	0.0800365	0.2373047	0.2307692	0.2640521	0.1484069
50	3	0.5	0.0012601	0.0074699	0.1180671	0.2063492	0.0396793	0.0167488
100	4	0.5	0.0015744	0.0160903	0.1991966	0.2592593	0.0417995	0.0260066
Hata Normu ($\|e\|_1$)			0.2179579	0.1045817	0.9874526	1.4424462	0.1895295	

Tablo 6'daki sonuçlara göre önerilen alt sınırların q'nun hem küçük değerlerinde hem de büyük değerlerinde tam güvenilirlikle yakın sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Üst sınır yaklaşım değerlerinde ise önerilen üç yöntem içinde sadece n, k ve q'nun belli değerleri için tam güvenilirlik değerleri ile uyum içinde kaldığı görülmüştür. Son olarak hem alt sınır yaklaşım yöntemlerinin hem de üst sınır yaklaşım yöntemlerinin hata normları incelendiğinde sadece Drman vd. [8] tarafından önerilen üst sınır yaklaşımın diğerlerinden kötü performans gösterdiğini söyleyebiliriz.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, mühendislik sistemlerinin tasarımında sıklıkla kullanılan ardıl-k sistemlerin güvenilirliği için önerilen sınır yöntemlerinin karşılaştırılmasını verdik. Bu bağlamda, ilk olarak doğrusal G sistemler için sınır yöntemlerini karşılaştırdık. Elde edilen sonuçlardan Kuo vd. ve Zuo tarafından önerilen alt sınır yaklaşımının performansının tam güvenilirlikle uyum içinde olduğunu, üst sınır yaklaşımında ise Kuo vd. tarafından önerilen yaklaşımın Zuo tarafından önerilen yaklaşımdan daha üstün olduğunu görülmüştür. Dairesel G sistemler için ise Kuo vd. tarafından önerilen hem alt hem de üst sınır yaklaşımının tam güvenilirlik için sınır değerleri oluşturma konusunda iyi performans sergilediklerini söyleyebiliriz.

Doğrusal F sistemler için özellikle Chrysaphinou ve Papastavridis; Barbour, Holst ve Janson; Barbour, Chrysaphinou ve Ross tarafından önerilen alt sınır yaklaşımlarının q'nun büyük değerleri için kötü sonuçlar verdiğini ve bunun sebebinin de q'nun oldukça küçük değerlerinde daha iyi çalışmasından kaynaklanmaktadır. Genel itibari ile Papastavridis ve Muselli tarafından önerilen alt sınır yaklaşım yöntemlerinin diğer yöntemlerden daha üstün olduklarını söyleyebiliriz.

Doğrusal F sistemler için önerilen üst sınır yaklaşım yöntemleri de alt sınır yöntemlerinde olduğu gibi genel olarak q'nun küçük değerleri için daha iyi sonuçlar verirken q'nun değeri arttıkça Fu, Papastavridis, Muselli ve Xie ve Lai tarafından önerilen yöntemler dışında kalan yöntemlerin performanslarının bozulduğu görülmektedir. Dolayısıyla Fu, Papastavridis, Muselli ve Xie ve Lai tarafından önerilen yöntemlerin sınır yaklaşımları için tercih edilmesinin daha iyi olduğunu söyleyebiliriz.

Son olarak, dairesel F sistemler için ise Papastavridis tarafından önerilen alt sınır yönteminin Kuo ve Zuo tarafından önerilen yöntemden daha iyi performans gösterdiği; üst sınır için de önerilen yöntemler belli değerlerde ayrı ayrı iyi sonuçlar verdiklerinden tam olarak birbirlerine üstünlüklerinden söz edemeyiz.

Genel olarak önerilen yöntemler, sadece n ve k'nın değerine bağlı olmanın dışında hata olasılık değerine (q)'de bağlı olduğundan seçilen sistemlerde hangi yöntemin uygulanacağına karar vermeden önce yöntemlerin hangi durumlarda daha iyi performans gösterdiklerinin araştırılmasında fayda olacaktır.

Teşekkür

Bu çalışma İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından SDK-2018-991 proje numarası ile desteklenmiştir.

Yazarların Katkısı

Bu çalışma, Prof. Dr. Mehmet GÜNGÖR danışmanlığında Ahmet DEMİRALP tarafından hazırlanan doktora tez çalışmasından özetlenmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

[1] Kuo, W., Zuo, M. J. 2003. Optimal Reliability Modeling: Princeples and Applications. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1-544.

[2] Tong, Y. L. 1985. A Rearrangement Inequality for the Longest Run, With an Application to Network Reliability. Journal of Applied Probability, 22(2), 386-393.

[3] Kuo, W., Zhang, W., Zuo, M. 1990. A Consecutive-k-out-of-n:G System: The Mirror Image of a Consecutive-k-out-of-n:F System. IEEE Transactions on Reliability, 39(2), 244-253.

[4] Kontoleon, J. M. 1980. Reliability determination of a r-successive-out-of-n: F system. IEEE Transactions on Reliability, 29(5), 437-437.

[5] Chiang, D. T., Niu, S. C. 1981. Reliability of consecutive-k-out-of-n: F system. IEEE Transactions on Reliability, 30(1), 87-89.

[6] Zuo, M., Kuo, W. 1990. Design and performance analysis of consecutive-k-out-of-n structure. Naval Research Logistics, 37(2), 203-230.

[7] Shanthikumar, J. G. 1982. Recursive algorithm to evaluate the reliability of a consecutive-k-out-of-n: F system. IEEE Transactions on Reliability, 31(5), 442-443.

[8] Derman, C., Lieberman, G. J., Ross, S. M. 1982. On the consecutive-k-of-n: F system. IEEE Transactions on Reliability, 31(1), 57-63.

[9] Bollinger, R. C., Salvia, A. A. 1982. Consecutive-k-out-of-n: F networks. IEEE Transactions on Reliability, 31(1), 53-56.

[10] Bollinger, R. C. 1982. Direct computation for consecutive-k-out-of-n: F systems. IEEE Transactions on Reliability, 31(5), 444-446.

[11] Chao, M. T., Lin, G. D. 1984. Economical design of large consecutive-k-out-of-n: F systems. IEEE Transactions on Reliability, 33(5), 411-413.

[12] Lambiris, M., Papastavridis, S. 1985. Exact reliability formulas for linear & circular consecutive-k-out-of-n: F systems. IEEE Transactions on Reliability, 34(2), 124-126.

[13] Fu, J. C. 1985. Reliability of a large consecutive-k-out-of-n: F system. IEEE transactions on reliability, 34(2), 127-130.

[14] Antonopoulou, I., Papastavridis, S. 1987. Fast recursive algorithm to evaluate the reliability of a circular consecutive-k-out-of-n: F system. IEEE Transactions on Reliability, 36(1), 83-84.

[15] Chan, F. Y., Chan, L. K., Lin, G. D. 1988. On consecutive-k-out-of-n: F systems. European journal of operational research, 36(2), 207-216.

[16] Peköz, E. A., Ross, S. M. 1995. A Simple Derivation of Exact Reliability Formulas For Linear and Circular Consecutive-k-out-of-n:F Systems. J. Appl. Prob., 32(2), 554-557.

[17] Cluzeau, T., Keller, J., Schneeweiss, W. 2008. An efficient algorithm for computing the reliability of consecutive-k-out-of-n:F systems. IEEE Transactıons On Relıabılıty, 57(1), 84-87.

[18] Gökdere, G., Gürcan, M., Kılıç, M. B. 2016. A new method for computing the reliability of consecutive k-out-of-n: F systems. Open Physics, 14(1), 166-170.

[19] Gökdere, G., Güral, Y. 2018. Birnbaum Önem Tabanlı Genetik Algoritma ve Doğrusal Ardışık n-den k-çıkışlı Sistemlerin Optimizasyonunda Uygulaması. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 7(2), 276-283.

[20] Özbey, F., Gökdere, G. 2021. Analysis of Linear Consecutive-2-out-of-n:F Repairable System with Different Failure Rate. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 10(1), 91-99.

[21] Özbey, F., Gökdere, G. 2021. Doğrusal genelleştirilmiş ağırlıklı n-den k-çıkışlı F sistemin güvenilirlik analizi. İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya, 14(1), 1-13.

[22] Hwang, F. K. 1982. Fast Solutions for Consecutive-k-out-of-n: F System. IEEE Transactions On Reliability, R-31(5), 447-448.

[23] Zuo, M. 1993. Reliability and component importance of a consecutive-k-out-of-n system. Microelectronics Reliability, 33(2), 243-258.

[24] Salvia, A. A. 1982. Simple Inequalities for Consecutive-k-out-of-n:F Networks. IEEE Transactions On Reliability, R-31(5), 450.

[25] Fu, J. C. 1986. Bounds for Reliability of Large Consecutive-k-out-of-n:F Systems with Unequal Component Reliability. IEEE Transactions On Reliability, 35(3), 316-319.

[26] Papastavridis, S. 1986. Upper and Lower Bounds for the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n:F System. IEEE Transactions On Reliability, 35(5), 607-610.

[27] Papastavridis, S. 1986. Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n:F systems. IEEE Trans.On Reliability, 35(5), 613-615.

[28] Chrysaphinou, O., Papastavridis, S. 1990. Reliability of a Consecutive-k-out-of-n System in a Random Environment. Journal of Applied Probability, 27(2), 452-458.

[29] Barbour, A. D., Holst, L., Janson, S. 1992. Poisson approximation (Vol. 2). The Clarendon Press Oxford University Press.

[30] Papastavridis, S. G., Koutras, M. V. 1993. Bounds for Reliability of Consecutive k-within-m-out-of-n:F Systems. IEEE Transactions On Reliability, 42(1), 156-160.

[31] Barbour, A. D., Chrysaphinou, O., Ross, M. 1995. Compound Poisson Approximation in Reliability Theory. IEEE Transactions On Reliability, 44(3), 398-402.

[32] Muselli, M. 1997. On Convergence Properties of pocket Algorithm. IEEE Transactıons On Neural Networks, 8(3), 623-629.

[33] Xie, M., Lai, C. D. 1998. On Reliability Bounds via Conditional Inequalities. Journal of Applied Probability, 35(1), 104-114.

[34] Muselli, M. 2000. New Improved Bounds For Reliability of Consecutive-k-out-of-n:F Systems. Journal of Applied Probability, 37(4), 1164-1170.

[35] Muselli, M. 2000. Useful Inequalities for the Longest Run Distribution. Statistics &Probability Letters, 46(3), 239-249.

[36] Dauş, L., Beiu, V. 2015. Lower and Upper Reliability Bounds for Consecutive-k-out-of-n:F Systems. IEEE Transactions on Reliability, 64(3), 1128-1135.

[37] Makri, F. S., Psillakis, Z. M. 2011. On success runs of a fixed length in Bernoulli sequences:Exact and asymptotic results. Computational Mathematics Appl., 61(4), 761-772.

[38] Saenz-de-Cabezon, E., Wynn, H. P. 2011. Computational algebraic algorithms for the reliability of generalized k-out-of-n and related systems. Math. Comput. Simul., 82(1), 68-78.