DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN ve MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 2 Sayı: 1 sh. 141-145 Ocak 2000

İKİ İNDİSLİ DÜZLEMSEL DAĞITIM PROBLEMİNİN MATRİS DENKLEMLERİ İLE İNCELENMESİ

(INVESTIGATION OF TWO-INDEX PLANAR TRANSPORTATION PROBLEM WITH MATRIX EQUATIONS)

Mustafa ÖZEL*

ÖZET / ***ABSTRACT***

Bu çalışmada, matris denklemlerinin iki indisli düzlemsel dağıtım problemine uygulaması ele alınmış ve problemin matris denklemleri cinsinden formülasyonu yapılarak çözümü incelenmiştir.

In this study, the application of matrix equations to two-index transportation problem is considered and the solution of the problem has been investigated by formulating it in terms of matrix equations.

ANAHTAR KELİMELER / ***KEY WORDS***

Dağıtım problemi, doğrusal programlama problemi, matris denklemi.
Transportation problem, linear programming problem, matrix equation.

*Dokuz Eylül Üniversitesi, Müh. Fak., Makina Müh. Bölümü, Bornova/İZMİR

1. GİRİŞ

İki indisli dağıtım problemi, doğrusal programlamanın özel bir biçimidir. İlk olarak 1941 yılında Hitchcock tarafından ortaya atılan, 1947 de Koopmans tarafından ayrıntılarıyla incelenen ve 1951 yılında da Dantzig tarafından Simplex yöntemine uygulanan bu problem, çıkışların bir kümesinden varışların bir kümesine minimum maliyetli göndermeler olarak tanımlanır.

Varsayalım ki, problem *m* çıkış ve *n* varışlı olsun. c_{ij} ler *i* çıkıştan, *j* varışa birim maliyetler; x_{ij} ler *i* çıkıştan, *j* varışa göndermeler, a_i ler sunumlar ve b_j ler de istemler olmak üzere iki indisli dağıtım problemi bir doğrusal programlama problemi olarak

$$\text{Min } \left\{ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \,\middle|\, M\mathbf{x} = \mathbf{g}\,, \mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{a} = \mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0 \right\} \tag{1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada,

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}=[a_1, a_2, \ldots, a_m],\ \ \mathbf{b}^{\mathrm{T}}=[b_1, b_2, \ldots, b_n],\ \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}=[c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{mn}],$$

ve

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}=[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}] \ \text{ ve } \ \mathbf{g}^{\mathrm{T}}=[\mathbf{a}^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}^{\mathrm{T}}]$$

dir.

M, $(m+n)x\ mn$ boyutlu ve $m+n-1$ ranklı katsayılar matrisidir. Bu matris, Kronecker çarpımlar cinsinden

$$M=\begin{bmatrix} 1_n^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_n \otimes 1_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada; $\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}$ tüm elemanları 1 olan 1x*n* boyutlu vektör ve I_n *n*x*n* boyutlu birim matristir(Bulut, 1982;Bulut, 1991).

Dağıtım problemi, doğrusal programlamanın ilk problemlerindendir. Bu problem, birçok yazar tarafından ele alınmış ve değişik yöntemlerle incelenmiştir. Bu çalışmada, Bulut tarafından(Bulut, 1991) tanımlanan dağıtım probleminin matris denklemleri cinsinden formülasyonu yapılarak çözümü incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, dağıtım probleminin matris denklemleriyle incelenmesinde temel oluşturan tanım ve teoremleri ele alacağız.

Tanım 2.1 $A=[a_{ij}]$, *mxn* ve $B=[b_{ij}]$, *pxq* boyutlu iki matris olsun. *mpxnq* boyutlu,

$$A \otimes B=[Ab_{ij}] \tag{3}$$

matrisine A ve B nin *Kronecker çarpımı* denir. A ile B sırasıyla *mxm* ve *nxn* boyutlu kare matrisler olmak üzere elde edilen

$$A \oplus B=A \otimes I_n+I_m \otimes B \tag{4}$$

matrisine de A ve B nin *Kronecker toplamı* adı verilir(Ben-Israel vd..., 1974; Graybill, 1969).
Tanım 2.2 $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ *mxn* boyutlu matrisler olmak üzere *mxn* boyutlu

$$A*B = [a_{ij}b_{ij}] \tag{5}$$

matrisine A ve B nin Hadamard çarpımı denir (Rao vd..., 1971).
Tanım 2.3 A *mxn* boyutlu ve $r \leq \min(m,n)$ ranklı bir matris olsun. Aşağıdaki dört koşulu sağlayan *nxm* boyutlu A^+ matrisine A nın genelleştirilmiş tersi denir :

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ \ A^+AA^+ = A^+ \\ &\text{ii)}\ \ AA^+A = A \\ &\text{iii)}\ \ (AA^+)^* = AA^+ \\ &\text{iv)}\ \ (A^+A)^* = A^+A \end{aligned} \tag{6}$$

(Ben-Israel vd..., 1974; Graybill, 1969).
Teorem 2.1 A *mxn*, C *mxp*, B *pxq* ve D *nxq* boyutlu matrisler olsun. AX=C, XB=D matris denklemlerinin ortak bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul AD=CB ve genel çözümü

$$X= A^+C + DB^+ - A^+ADB^+ + (I-A^+A)H(I-BB^+) \tag{7}$$

dir. Burada, H keyfi matristir (Ben-Israel vd...,1974; Rao vd...,1971).

3. DAĞITIM PROBLEMLERİNİN MATRİS DENKLEMİ İLE GÖSTERİMİ

(1.1) in eşdeğerini kullanarak dağıtım problemini matris denklemleri cinsinden yazmak olanaklıdır. (1.1) in eşdeğeri,

$$\text{Min } \left\{ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \middle| M^{\mathrm{T}}M\mathbf{x} = M^{\mathrm{T}}\mathbf{g} , \mathbf{x} \geq 0 \right\} \tag{8}$$

dir (Bulut, 1991). Burada,

$$M^{\mathrm{T}}M=J_n \otimes I_m + I_n \otimes J_m \tag{9}$$

Ve

$$M^{\mathrm{T}}\mathbf{g}= \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{a} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{1}_m \tag{10}$$

dir. Dikkat edilirse (3.1) problemi,

$$\text{Min } \left\{ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \middle| (J_n \oplus J_m)\mathbf{x} = 1_n \otimes \mathbf{a} + \mathbf{b} \otimes 1_m , \mathbf{x} \geq 0 \right\} \tag{11}$$

biçiminde ifade edilebilir(Bulut vd..., 1993).
Varsayalım ki,

$$G = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_1 & \cdots & a_m + b_1 \\ a_1 + b_2 & a_2 + b_2 & \cdots & a_m + b_2 \\ & & \cdots & \\ a_1 + b_n & a_2 + b_n & \cdots & a_m + b_n \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m] \ , \ C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m] \tag{13}$$

ve

$$\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}]^T, \ \mathbf{c}_i = [c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}]^T, \ i = 1,2,\ldots,m \tag{14}$$

olsun. Burada; X göndermelerin matrisi, C maliyet matrisi, G sunum-istemlerin matrisidir. Buradan,

$$\text{Min}\left\{ \mathbf{1}_\mathbf{n}^\mathrm{T} (C * X) \mathbf{1}_m \,\middle|\, J_n X + X J_m = G, X \geq 0 \right\} \tag{15}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 (3.8) probleminin amaç fonksiyonu

$$\mathbf{1}_\mathbf{n}^\mathrm{T} (C * X) \mathbf{1}_\mathbf{m} = \text{İz}(CX^T) \tag{16}$$

dir. Burada $*$, Hadamard çarpımıdır.

Sonuç 3.1, Hadamard çarpım ve matrislerdeki iz tanımı kullanılarak kolayca kanıtlanabilir. Bunu kullanarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.2 (1.1) probleminin eşdeğeri,

$$\text{Min}\left\{ \text{İz}(CX^T) \,\middle|\, J_n X + X J_m = G, X \geq 0 \right\} \tag{17}$$

dir.

Kanıt Denklem(3.8) ve (3.9) kullanarak kanıtlanır.

Şimdi de,

$$E = \mathbf{a}^T \otimes \mathbf{1}_n \text{ ve } D = \mathbf{1}_m^T \otimes \mathbf{b} \tag{18}$$

olmak üzere

$$J_n X = E \ , \ X J_m = D \tag{19}$$

matrislerini ele alalım. Dikkat edilirse, E+D=G dir. Buradan, aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.1 Problem (3.10) un uygun(feasible) çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $J_n D = E J_m$ ve problemin uygun çözümü

$$X = \frac{1}{n}\left(\mathbf{a}^T \otimes \mathbf{1}_\mathbf{n}\right) + \frac{1}{m}\left(I_n - \frac{1}{n} J_n\right)\left(\mathbf{1}_m^T \otimes \mathbf{b}\right) + \left(I_n - \frac{1}{n} J_n\right) H \left(I_m - \frac{1}{m} J_m\right) \tag{20}$$

dir. Burada, H keyfi matristir.

Kanıt Teorem 2.1 kullanılarak kanıtlanır.
Sonuç 3.3 Problem (3.10) un uygun çözümü

$$X=\frac{1}{n}\left(\mathbf{a}^{T}\otimes\mathbf{1}_{\mathbf{n}}\right)+\frac{1}{m}\mathbf{YY}^{T}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{m}}^{T}\otimes\mathbf{b}\right)+\mathbf{YY}^{T}H\mathbf{ZZ}^{T} \tag{21}$$

dir. Burada $\mathbf{Y}=[\mathbf{y}_2,\mathbf{y}_3,...,\mathbf{y}_n]$ ve $\mathbf{Z}=[\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3,...,\mathbf{z}_m]$, sırasıyla, J_n ve J_m matrislerinin sıfır özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin oluşturduğu matrislerdir.
Kanıt Teorem 3.1 ve (Özel, 1998) den yararlanarak kanıtlanır.

Bu sonuç, dağıtım probleminin matris denklemleri cinsinden incelenebileceğini, çözülebileceğini ve çözümünün J_n ve J_m matrislerinin özdeğer ve özvektörlerine bağlı olarak ortaya çıktığını göstermektedir.

KAYNAKLAR

Ben - Israel, A. & Grenville, T. N. E. (1974): Generalized inverses : Theory and applications. J.Wiley, New York.

Bulut, H (1982): Bir ağ akışı probleminin genelleştirilmiş ters matrislerle incelenmesi. Doçentlik Tezi. Ege Üniv., İzmir.

Bulut, H. (1991): Algebriac characterizations of the singular value decompositions in the transportation problem. J. Math. Anal. Appl., 154, 13-21.

Bulut, H. (1993): Spectral decompositions and generalized inverses in a circularization network flow problem. J. Math. Anal. Appl., 174, 2, 390-402.

Graybill, F. A., (1969): Introduction to matrices with applications in statistics. Wadsworth, Belmont, Calif.

Özel, M. (1998): Characterizations of primal and dual optimality criteria in a circularization network flow problem. Ph.D. Thesis, D.E.Ü., İzmir.

Rao, S.S. & Mitra, S.K. (1971): Generalized inverse of matrices and its applications. J.Wiley, New York.