Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 9 (2021) 1-14

Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Artan Operatör Konveks Fonksiyon İçin Berezin Sayı Eşitsizliği[1]

Mualla Birgül HUBAN [a,*], Hamdullah BAŞARAN [b], Mehmet GÜRDAL [b]

[a] *Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Isparta, TÜRKİYE*
[b] *Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Bölümü, Isparta, TÜRKİYE*
* *Sorumlu yazarın e-posta adresi: muallahuban@isparta.edu.tr*
DOI: 10.29130/dubited.1013082

Öz

Normalleştirilmiş üretici çekirdeği $K_\lambda := \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|_{\mathcal{H}}}$ olan üretici çekirdekli $\mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayı üzerinde A sınırlı lineer operatör için Berezin sembolü ve Berezin sayısı sırasıyla $\tilde{A}(\lambda) := \langle AK_\lambda, K_\lambda \rangle_{\mathcal{H}}$ ve $ber(A) := sup_{\lambda\in\Omega}|\tilde{A}(\lambda)|$ biçiminde tanımlanır. Bu karakteristik ifadeler kullanılarak $ber(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} ber(|A| + i|A^*|)$ eşitsizliği elde edilmiştir. Bu çalışmamızda ise onlar arasındaki diğer eşitsizlikler ispatlanmış ve Berezin sayı eşitsizlikleri için operatör konveks fonksiyonlarının bazı uygulamaları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Üretici çekirdekli Hilbert uzayı, Berezin sembolü, Berezin sayısı, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Operatör konveksliği*

Berezin Number Inequality for Increasing Operator Convex Function

Abstract

For a bounded linear operator A on a reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{H}(\Omega)$, with normalized reproducing kernel $K_\lambda := \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|_{\mathcal{H}}}$ the Berezin symbol and Berezin number are defined respectively by $\tilde{A}(\lambda) := \langle AK_\lambda, K_\lambda \rangle_{\mathcal{H}}$ and $ber(A) := sup_{\lambda\in\Omega}|\tilde{A}(\lambda)|$. A straightforward comparison between these characteristics yields the inequalities $ber(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} ber(|A| + i|A^*|)$. In this paper, we prove further inequalities relating them and give some applications of operator convex functions to Berezin number inequalities.

Keywords: *Reproducing kernel Hilbert space, Berezin symbol, Berezin number, Hermite-Hadamard inequality, Operator convexity*

[1]ICAIAME 2021 konferansında sunulmuştur.
Geliş: 21/10/2021, Düzeltme: 05/11/2021, Kabul: 13/11/2021

I. GİRİŞ

Bir üretici çekirdekli Hilbert uzayı (kısaca, ÜÇHU) $\varphi_\lambda(f) = f(\lambda), \lambda \in \Omega$ fonksiyonelleri $\mathcal{H}$ üzerinde sürekli olacak şekilde bazı Ω kümesi üzerinde kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayıdır. O zaman klasik Riesz temsil teoreminden her bir $\lambda \in \Omega$ ve her $f \in \mathcal{H}$ için $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_\lambda \in H$ fonksiyonu mevcuttur. Burada $\{ k_\lambda : \lambda \in \Omega\}$ ailesi $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeğidir. Bilinen ÜÇHU'lar $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk olmak üzere $\mathcal{H}^2(D)$ Hardy uzayı, $L_a^2(D)$ Bergman uzayı, $D^2(D)$ Dirichlet uzayı ve $F(\mathbb{C})$ Fock uzayıdır. ÜÇHU'lar ve üretici çekirdekler ile ilgili detaylı bilgi [1] numaralı kaynakta verilmiştir.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ uzayı $\mathcal{H}$ üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin Banach cebiri olmak üzere $\mathcal{H}$ üzerinde bir A sınırlı lineer operatör, yani $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için onun Berezin dönüşümü (veya Berezin sembolü)

$$\tilde{A} := \langle AK_\lambda, K_\lambda \rangle \quad (\lambda \in \Omega) \tag{1}$$

biçiminde Ω kümesi üzerinde tanımlı fonksiyondur (bkz. Berezin [5]). Burada $K_\lambda := \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}$ ifadesi $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeğidir ve $\langle .,. \rangle$ iç çarpım ise $\mathcal{H}$ uzayından alınmıştır. O halde Berezin sembolü olan $\tilde{A}$ fonksiyonu Ω üzerinde sınırlı fonksiyon olup A operatörünün Berezin sayısı

$$ber(A) := \sup_{\lambda \in \Omega} \left|\tilde{A}(\lambda)\right| \leq \|A\| \tag{2}$$

ile tanımlanır (bkz. Karaev [18, 19]).

Bir A operatörünün Berezin sayısı aşağıdaki özellikleri sağlar:
(i) Her $\xi \in \mathbb{C}$ için $ber(\xi A) = |\xi| ber(A)$;
(ii) Her $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için $ber(A_1 + A_2) \leq ber(A_1) + ber(A_2)$. (3)

Aynı zamanda Berezin sembolü tanımından

$$Ber(A) := Range(\tilde{A}) = \{\tilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega\} \subset W(A) := \{\langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{H} \ ve \ \|x\| = 1\} \tag{4}$$

olduğu bilinen bir gerçektir. Burada sırasıyla $Ber(A)$ ve $W(A)$ ifadeleri A operatörünün Berezin kümesi (veya Berezin görüntüsü) ve A operatörünün nümerik yarıçapıdır. Ayrıca $ber(A) \leq w(A) := sup_{|x|=1} |\langle Ax, x \rangle|$ (A operatörünün nümerik yarıçapı) dir (daha detaylı bilgi için bkz. [7, 15, 22, 23, 27]).

Operatörlerin Berezin kümesi ve Berezin sayısı [18] de Karaev tarafından ÜÇHU üzerinde operatörlerin yeni nümerik karakteristiği olarak verilmiştir. Bu yeni kavramların temel özellikleri için [2, 3, 20, 29, 30] kaynaklarına bakılabilir.

Diğer taraftan herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\| \tag{5}$$

ve

$$ber(A) \leq w(A) \leq \|A\| \tag{6}$$

iyi bilinen eşitsizliklerdir. Aynı zamanda Berezin sayı eşitsizlikleri [9-14, 16, 31-33] numaralı kaynaklarda diğer eşitsizlikler kullanılarak incelenmiştir.

Diğer taraftan $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörlerinin aşağıdaki Berezin norm tanımını verebiliriz:

$$\|A\|_{Ber} := \sup_{\lambda\in\Omega}\|AK_\lambda\|. \tag{7}$$

Burada $\|A\|_{Ber}$ ifadesi $\mathcal{B}(\mathcal{H}((\Omega))$ uzayında bir yeni operatör norm belirler ve $ber(A) \le \|A\|_{Ber} \le \|A\|$ olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cebiri H kompleks Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin C^*-cebiri olsun. Her $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için B ve C kendine eş operatörler olmak üzere $A = B + iC$ kartezyen ayrışımı ifade etsin. Bu çalışmamızda X^* operatörü X in eş operatörü olmak üzere, eğer $X^* = X$ ise $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörünü kendine eş olarak tanımlayacağız.

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için $|A|$ mutlak değeri $|A| = (A^*A)^{1/2}$ ile tanımlıdır. Burada her $x \in H$ için $\langle |A|x, x\rangle \ge 0$ ise $|A|$ ifadesinin pozitif yarı tanımlı operatör olduğuna dikkat edelim.

[17] numaralı kaynakta Huban vd.

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| \le \left(ber(A)\right)^2 \le \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\| \tag{8}$$

ve

$$ber(A) \le \frac{1}{\sqrt{2}} ber(|A| + i|A^*|) \tag{9}$$

eşitsizliklerini ispatlamışlardır.

Son zamanlarda, [25] de Moradi ve Sabahheh konveks fonksiyonları kullanarak bazı iyi bilinen nümerik yarıçap eşitsizliklerinin refine edilmiş ve genelleştirilmiş formlarını elde etmişlerdir. Bu motivasyonla çalışmamızda bazı operatör konveks fonksiyonların Berezin sayıları için $\tilde{A}$ sınırlı fonksiyonu kullanılarak bazı yeni genel formlar incelenmiştir. Bu amaca ulaşmak için operatör konveks fonksiyonlar ve iç çarpım uzaylarındaki vektörler için makalenin ikinci kısımda verilen bazı bilinen eşitsizlikler kullanılmıştır (bkz. [6, 8, 24, 26]). Bu yaklaşım dikkate alınarak, aynı zamanda üretici çekirdekli Hilbert uzay operatörlerinin bazı Berezin sayı eşitsizliklerinin refine edilmiş ve genelleştirilmiş formları ile ilgili sonuçlar sunulmuştur.

II. BİLİNEN YARDIMCI TEOREMLER

Şimdi sonuçlarımızda önemli rol sahibi olan bazı bilinen yardımcı teoremleri bu kısımda sunalım. Burada operatör konveks fonksiyon temel kabulümüz olacaktır.

Tanım 1. Eğer f fonksiyonu sürekli ve J aralığında spektrumla her kendine eş A_1, A_2 operatörleri için

$$f\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right) \le \frac{f(A_1)+f(A_2)}{2}, \tag{10}$$

ise o zaman $f: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir operatör konveks fonksiyon denir. Burada her $0 \le \xi \le 1$ için $f\big((1-\xi)A_1 + \xi A_2\big) \le (1-\xi)f(A_1) + \xi f(A_2)$ bulunur.

Eğer $f: J \to \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon ve A_1 operatörü J de spektrumla bir kendine eş operatör ise o zaman $f(A_1)$ fonksiyonel hesaplamalara göre tanımlıdır. Ayrıca f artan fonksiyon olduğunda S kendine eş operatör için $\|f(|S|)\| \le f(\||S|\|)$ olduğunu göstermek kolaydır. Bilinen anlamda bir konveks fonksiyonun operatör konveks olmasına gerek olmadığı bilinen bir sonuçtur ve $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı $f(\xi)=\xi^p, p > 0$, fonksiyonunun operatör konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $p \in [1,2]$ olmasıdır.

Herhangi $x_1, x_2 \in J$ ve $f: J \to \mathbb{R}$ operatör konveks fonksiyon için iyi-bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliğinden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big((1-\xi)x_1 + \xi x_2\big) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{11}$$

Burada (11) eşitsizliği $f\big((x_1 + x_2) / 2\big) \leq \big(f(x_1) + f(x_2)\big) / 2$ konveks eşitsizliğinin bir refine edilmiş halidir.

Aşağıda (11) in modifiye edilmiş operatör versiyonu [6] da ispat edilmiştir:

Yardımcı Teorem 1. $f: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J aralığı üzerinde bir operatör konveks fonksiyon olsun. O zaman J da spektrumlu herhangi S ve T kendine eş operatörleri için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{S+T}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3S+T}{4}\right) + f\left(\frac{S+3T}{4}\right)\right] \\ &\leq \int_0^1 f\big((1-\xi)S + \xi T\big)\, d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{S+T}{2}\right) + \frac{f(S)+f(T)}{2}\right] \\ &\leq \frac{f(S)+f(T)}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki diğer yardımcı teoremleri verebiliriz.

Yardımcı Teorem 2 ([21])**.** $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $x, y \in H$ herhangi vektörler olsun. O zaman

$$|\langle A_1 x, y\rangle| \leq \langle |A_1| x, x\rangle \langle |A_1^*| y, y\rangle \tag{13}$$

elde edilir.

Mond ve Pečarić [24] aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Yardımcı Teorem 3. $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü J aralığında spektrumlu bir kendine eş operatör ve $x \in H$ bir birim vektör olsun. Eğer f fonksiyonu J üzerinde konveks fonksiyon ise o zaman

$$f(\langle A_1 x, x\rangle) \leq \langle f(A_1) x, x\rangle \tag{14}$$

bulunur.

Eğer üstteki eşitsizlikte f konkav ise tersi sağlanır.

Bizim son çalışmamız olan [17] de [28] deki eşitsizliğin ters-tiplisi aşağıdaki gibi gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} f\big(ber(A)\big) &\leq \left\| \int_0^1 f(\xi|A_1| + (1-\xi)|A_1^*|) d\xi \right\|_{ber} \\ &\leq \tfrac{1}{2} \|f(|A_1|) + f(|A_1^*|)\|_{ber}. \end{aligned} \tag{15}$$

Şimdi (14) eşitsizliğinin refine edilmiş versiyonu verilsin.

Yardımcı Teorem 4 ([8]). Eğer $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$ ve $0 \leq \xi \leq 1$ ise o zaman

$$|\langle A_1 x, x\rangle|^2 \leq \langle |A_1|^{2(1-\xi)\xi} x, x\rangle \langle |A_1^*|^{2\xi} x, x\rangle \tag{16}$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 5 ([26]). Eğer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir operatör konveks, A_1 ve A_2 operatörleri $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ uzayında iki kendine eş operatör ve $0 \leq \xi \leq 1$ ise o zaman

$$\begin{aligned} &f\big((1-\xi)A_1 + \xi A_2\big) + 2\mathrm{p}\big(f(A_1)\nabla f(A_2)\big) - f\big((A_1)\nabla f(A_2) - f(A_1 \nabla A_2)\big) \\ &\leq (1-\xi)f(A_1) + \xi f(A_2) \end{aligned} \tag{17}$$

mevcuttur. Burada $p = min\{\xi, 1-\xi\}$ ve $A_1 \nabla A_2 = (A_1 + A_2)\,/\,2$ alınacaktır.

III. TEMEL SONUÇLAR

Çalışmanın temel sonucunu ifade etmek gerekirse;

(12) eşitsizliğinde S yerine $\frac{1}{2}|A_1|$ ve T yerine $\frac{1}{2}|A_2|$ alınsın. f negatif olmayan artan bir fonksiyon olduğunda $\|f(|S|)\| = f(\||S|\|)$ sağlanır ve aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

Önerme 1. $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir artan operatör konveks fonksiyon ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \left\| f\left(\frac{|A_1| + |A_2|}{4}\right) \right\|_{ber} &\leq \left\| \int_0^1 f\left(\frac{(1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|}{2}\right) d\xi \right\|_{ber} \\ &\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\|A_1\|_{ber}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\|A_2\|_{ber}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Önerme 1 de $A_1 = A$ ve $A_2 = A^*$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir. Burada $\|A_1\| = \||A_1|\| = \||A_1^*|\|$ olduğunu dikkate alarak ispatını kolaylıkla verebiliriz.

Teorem 1. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. O zaman herhangi $1 \leq p \leq 2$ için

$$\frac{1}{4^p}\||A| + |A|^*\|_{ber}^p \leq \left\| \int_0^1 \left(\frac{(1-\xi)|A| + \xi|A^*|}{2}\right)^p d\xi \right\|_{ber} \leq \frac{1}{2^p}\|A\|_{ber}^p \tag{19}$$

mevcuttur. Özel durumda ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{4}\||A| + |A|^*\|_{ber} \leq \left\| \int_0^1 \left(\frac{(1-\xi)|A| + \xi|A|^*}{2}\right)^2 d\xi \right\|_{ber}^{1/2} \leq \frac{1}{2}\|A\|_{ber}. \tag{20}$$

Burada (12) eşitsizliği durumundan dolayı f fonksiyonunun operatör konveksliğinin gerekli koşul olduğu dikkat edilmesi gereken bir durumdur. Şimdiki sonuç Önerme 1 in konveks versiyonunu verir.

Teorem 2. $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir konveks fonksiyon ise o zaman herhangi $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{(|A_1|\widetilde{+|A_2|})}{2}\right)(\lambda)\right) &\leq \int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{Ber}^2\right)d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\|f(|A_1|) + f(|A_2|)\|_{ber} \end{aligned} \tag{21}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(\left\|\frac{|A_1| + |A_2|}{2}\right\|_{ber}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{Ber}^2\right)d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\|f(|A_1|) + f(|A_2|)\|_{ber} \end{aligned} \tag{22}$$

bulunur. Diğer taraftan eğer f artan ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \left\|f\left(\frac{|A_1| + |A_2|}{2}\right)\right\|_{ber} &\leq \int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{Ber}^2\right)d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\|f(|A_1|) + f(|A_2|)\|_{ber} \end{aligned} \tag{23}$$

İspat. $\lambda \in \Omega$ keyfi olsun. O zaman (11) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} f\left(\langle\frac{|A_1| + |A_2|}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) &= f\left(\frac{\langle|A_1|K_\lambda, K_\lambda\rangle + \langle|A_2|K_\lambda, K_\lambda\rangle}{2}\right) \\ &\leq \int_0^1 f\big((1-\xi)\langle|A_1|K_\lambda, K_\lambda\rangle + \xi\langle|A_2|K_\lambda, K_\lambda\rangle\big)d\xi \\ &\leq \frac{f(\langle|A_1|K_\lambda, K_\lambda\rangle) + f(\langle|A_2|K_\lambda, K_\lambda\rangle)}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

elde edilir. $\int_0^1 f\big((1-\xi)\langle|A_1|K_\lambda, K_\lambda\rangle + \xi\langle|A_2|K_\lambda, K_\lambda\rangle\big)d\xi$ ifadesi I ile tanımlanırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f\Big(\big\langle\big((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\big)K_\lambda, K_\lambda\big\rangle\Big)d\xi \\ &= \int_0^1 f\left(\left\langle\big((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\big)^{1/2}K_\lambda, \big((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\big)^{1/2}K_\lambda\right\rangle\right)d\xi \\ &= \int_0^1 f\left(\left\|\big((1-\xi)|A_1| + \xi|A_2|\big)^{1/2}K_\lambda\right\|^2\right)d\xi \end{aligned} \tag{25}$$

bulunur. Ayrıca f nin konveksliği ve (14) eşitsizliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\langle|A_1|K_\lambda, K_\lambda\rangle + \langle|A_2|K_\lambda, K_\lambda\rangle}{2}\right) &\leq \frac{\langle f(|A_1|)K_\lambda, K_\lambda\rangle + \langle f(|A_2|)K_\lambda, K_\lambda\rangle}{2} \\ &\leq \frac{\big\langle\big(f(|A_1|) + f(|A_2|)\big)K_\lambda, K_\lambda\big\rangle}{2} \end{aligned} \tag{26}$$

elde edilir. (24), (25) ve (26) durumlarını beraber düşündüğümüzde $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in\Omega} f\left(\langle\frac{|A_1|+|A_2|}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) &\leq \sup_{\lambda\in\Omega}\int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1|+\xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}K_\lambda\right\|^2\right)d\xi \\ &= \int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1|+\xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{Ber}^2\right)\mathrm{d}\xi \\ &\leq \sup_{\lambda\in\Omega}\frac{\langle\left(f(|A_1|)+f(|A_2|)\right)K_\lambda, K_\lambda\rangle}{2}\end{aligned} \tag{27}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(\left(\widetilde{\frac{|A_1|+|A_2|}{2}}\right)(\lambda)\right) &\leq \int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1|+\xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{Ber}^2\right)d\xi \\ &\leq \frac{1}{2}\|f(|A_1|)+f(|A_2|)\|_{ber}\end{aligned} \tag{28}$$

elde edilir. Bu ise (21) eşitsizliğini verir. (22) eşitsizliğini ispatlamak için herhangi bir f için

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in\Omega} f\left(\langle\frac{|A_1|+|A_2|}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) &\leq f\left(\sup_{\lambda\in\Omega}\langle\frac{|A_1|+|A_2|}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) \\ &\leq \sup_{\lambda\in\Omega}\int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1|+\xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}K_\lambda\right\|^2\right)d\xi \\ &= \int_0^1 f\left(\left\|\left((1-\xi)|A_1|+\xi|A_2|\right)^{\frac{1}{2}}K_\lambda\right\|_{Ber}^2\right)d\,\xi \\ &\leq f\left(\left\|\frac{|A_1|+|A_2|}{2}\right\|_{ber}\right) \\ &\leq \left\|f\left(\frac{|A_1|+|A_2|}{2}\right)\right\|_{ber}\end{aligned} \tag{29}$$

olur. (23) eşitsizliğini ispatlamak için f fonksiyonunun artan olduğu durumu dikkate alabiliriz. O zaman

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in\Omega} f\left(\langle\frac{|A_1|+|A_2|}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) &\leq f\left(\sup_{\lambda\in\Omega}\langle\frac{|A_1|+|A_2|}{2}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) \\ &\leq f\left(\left\|\frac{|A_1|+|A_2|}{2}\right\|_{ber}\right) \\ &\leq \left\|f\left(\frac{|A_1|+|A_2|}{2}\right)\right\|_{ber}\end{aligned} \tag{30}$$

elde edilir. Üstteki son satırda f fonksiyonunun artan olduğu durumda $\|f(|S|)\| = f(\|S\|)$ eşitliği kullanılmıştır. Bu ise (21) durumu ile beraber (23) eşitsizliğinin ispatını verir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi vereceğimiz önemli sonuç için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyacımız vardır.

Yardımcı Teorem 6. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir ÜÇHU ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü ise $A = B + iC$ biçiminde kartezyen ayrışıma sahip olsun. O zaman

$$\|B\|_{ber}^2 \leq ber^2(A) \text{ ve } \|C\|_{ber}^2 \leq ber^2(A) \tag{31}$$

mevcuttur.

İspat. Eğer $A = B + iC$ ifadesi A nın kartezyen ayrışımı ise o zaman herhangi $\lambda \in \Omega$ için $\langle BK_\lambda, K_\lambda \rangle^2 + \langle CK_\lambda, K_\lambda \rangle^2 = |\langle AK_\lambda, K_\lambda \rangle|^2$ vardır. Bu sebeple $\langle BK_\lambda, K_\lambda \rangle^2 \leq |\langle AK_\lambda, K_\lambda \rangle|^2$olur. Böylece $\sup_{\lambda\in\Omega}\langle BK_\lambda, K_\lambda \rangle^2 \leq \sup_{\lambda\in\Omega}|\langle AK_\lambda, K_\lambda \rangle|^2$ olup $\|B\|_{ber}^2 = ber^2(B) \leq ber^2(A)$ ifadesine denktir. Benzer olarak $\|C\|_{ber}^2 \leq ber^2(A)$ olduğu ispatlanabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Burada (12) eşitsizliğinin aşağıdaki genelleştirilmiş halini elde etmek için Önerme 1, A operatörünün kartezyen ayrışımı ile beraber önemlidir.

Teorem 3. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü $A = B + iC$ kartezyen ayrışımına sahip olsun. Eğer $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ bir artan operatör konveks fonksiyon ise o zaman

$$\begin{aligned}\left\| f\left(\frac{A^*A + AA^*}{4}\right)\right\|_{ber} &\leq \left\| \int_0^1 f\left((1-\xi)B^2 + \xi C^2\right) d\xi \right\|_{Ber} \\ &\leq \frac{1}{2}\|f(B^2) + f(C^2)\|_{ber} \\ &\leq f\left(ber^2(A)\right)\end{aligned} \tag{32}$$

olur.

İspat. Teorem 2 de $|A_1|$ yerine $2B^2$ ve $|A_2|$ yerine $2C^2$ alınırsa Teorem 2 nin direkt uygulanmasından birinci ve ikinci eşitsizlik elde edilir. Üçüncü eşitsizlik için üçgen eşitsizliği, $\|f(|S|)\| = f(\|S\|)$ durumu ve Yardımcı Teorem 6 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|f(B^2) + f(C^2)\|_{ber} &\leq \frac{1}{2}(\|f(B^2)\|_{ber} + \|f(C^2)\|_{ber}) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(\|B^2\|_{ber}) + f(\|C^2\|_{ber})\right) \\ &\leq f\left(ber^2(A)\right)\end{aligned} \tag{33}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi $1 \leq p \leq 2$ olduğunda $f(\xi) = \xi^p$ fonksiyonunun artan operatör konveks fonksiyon olduğuna dikkat edelim. Bu durumda Teorem 3 aşağıda (8) deki birinci eşitsizliğin genişletilmiş halini verir.

Sonuç 1. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir ÜÇHU ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü ise $A = B + iC$ biçiminde kartezyen ayrışıma sahip olsun. O zaman herhangi $1 \leq p \leq 2$ için

$$\frac{1}{4^p}\|A^*A + AA^*\|_{ber}^p \leq \left\| \int_0^1 f\left((1-\xi)B^2 + \xi C^2\right)^P d\xi \right\|_{Ber} \leq ber^{2p}(A) \tag{34}$$

olur. Özel durumda aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\|_{ber} \leq \left\| \int_0^1 f\left((1-\xi)B^2 + \xi C^2\right)^2 d\xi \right\|_{Ber}^{1/2} \leq ber^2(A). \tag{35}$$

[4] numaralı kaynakta $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ artan operatör konveks fonksiyon olmak üzere

$$f\big(ber(A)\big) \le \left\| \int_0^1 f(\xi|A| + (1-\xi)|A^*|)d\xi \right\|_{ber} \le \frac{1}{2}\|f(|A|) + f(|A^*|)\|_{ber} \tag{36}$$

olduğu gösterilmiştir. [4] numaralı kaynakta verilen üstteki sonuç aşağıdaki teoremde iyileştirilmiştir.

Teorem 4. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir artan konveks fonksiyon ise o zaman

$$f\big(ber(A)\big) \le \frac{1}{2}\left\| f\left(\frac{3|A| + |A^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A| + 3|A^*|}{4}\right) \right\|_{ber} \tag{37}$$

bulunur.

İspat. Eğer $f: J \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $x_1, x_2 \in J$ ise o zaman

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &\le f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3x_1 + x_2}{4} + \frac{x_1 + 3x_2}{4}\right)\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{3x_1+x_2}{4}\right) + f\left(\frac{x_1+3x_2}{4}\right)\right) \end{aligned} \tag{38}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. $\lambda \in \Omega$ alınsın. Üstteki eşitsizlikte x_1 ve x_2 sırasıyla $\langle |A| K_\lambda, K_\lambda \rangle$ ve $\langle |A^*| K_\lambda, K_\lambda \rangle$ ile yer değiştirirse (14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} f\left(\langle \frac{|A| + |A^*|}{2} K_\lambda, K_\lambda \rangle\right) &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\langle \frac{3|A| + |A^*|}{4} K_\lambda, K_\lambda \rangle\right) + f\left(\langle \frac{|A| + 3|A^*|}{4} K_\lambda, K_\lambda \rangle\right)\right] \\ &\le \frac{1}{2}\left[\langle f\left(\frac{3|A| + |A^*|}{4}\right) K_\lambda, K_\lambda \rangle + \langle f\left(\frac{|A| + 3|A^*|}{4}\right) K_\lambda, K_\lambda \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2}\langle \left\{ f\left(\frac{3|A| + |A^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A| + 3|A^*|}{4}\right)\right\} K_\lambda, K_\lambda \rangle \end{aligned} \tag{39}$$

elde edilir. Diğer taraftan f artan olduğundan (13) eşitsizliği ve AM-GM eşitsizliği kullanılarak

$$f(|\langle A K_\lambda, K_\lambda \rangle|) \le f\left(\sqrt{\langle |A| K_\lambda, K_\lambda \rangle \langle |A^*| K_\lambda, K_\lambda \rangle}\right) \le f\left(\left\langle \frac{|A| + |A^*|}{2} K_\lambda, K_\lambda \right\rangle\right) \tag{40}$$

bulunur. (39) ve (40) eşitsizlikleri beraber düşünüldüğünde

$$f(|\langle A K_\lambda, K_\lambda \rangle|) \le \frac{1}{2}\langle \left\{ f\left(\frac{3|A|+|A^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A|+3|A^*|}{4}\right)\right\} K_\lambda, K_\lambda \rangle \tag{41}$$

ve

$$\sup_{\lambda \in \Omega} f(|\langle A K_\lambda, K_\lambda \rangle|) \le \frac{1}{2} \sup_{\lambda \in \Omega} \left\langle \left\{ f\left(\frac{3|A|+|A^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A|+3|A^*|}{4}\right)\right\} K_\lambda, K_\lambda \right\rangle \tag{42}$$

olup, bu ise istenilen

$$f\big(ber(A)\big) \le \frac{1}{2}\left\| f\left(\frac{3|A|+|A^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A|+3|A^*|}{4}\right)\right\|_{ber} \tag{43}$$

eşitsizliğini verir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi Teorem 4 ve (36) eşitsizliğinden aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 2. $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ artan konveks fonksiyon ise o zaman

$$\frac{1}{2}\left\| f\left(\frac{3|A_1| + |A_1^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A_1| + 3|A_1^*|}{4}\right)\right\|_{ber} \le \left\| \int_0^1 f(\xi|A_1| + (1-\xi)|A_1^*|)d\xi \right\|_{ber} \tag{44}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. A_1ve A_2 operatörleri J deki spektrumla iki kendine eş operatörler ve f ise J üzerinde operatör konveks olmak üzere (12) deki ikinci eşitsizlikten$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{3A_1+A_2}{4}\right) + f\left(\frac{A_1+3A_2}{4}\right)\right) \le \int_0^1 f(\xi A_1 + (1-\xi)A_2)\, d\xi$ elde edilir. Üstteki eşitsizlikte A_1ve A_2 yerine sırasıyla $|A_1|$ ve $|A_1^*|$ alınırsa $\left[\frac{1}{2} f\left(\frac{3|A_1|+|A_1^*|}{4}\right) + f\left(\frac{|A_1|+3|A_1^*|}{4}\right)\right] \le \int_0^1 f(\xi|A_1| + (1-\xi)|A_1^*|)\ d\xi$ eşitsizliği elde edilir. Bu da (44) a karşılık gelir.

Şimdi (8) deki ilk eşitsizliğin yeni inceltilmiş halini vermek için farklı bir yaklaşım kullanacağız. Bunun için temel eşitsizliğimiz S ve T kendine eş operatörler olmak üzere

$$\left(\frac{S+T}{2}\right)^2 \le \left(\frac{S+T}{2}\right)^2 + \left(\frac{|S-T|}{2}\right)^2 = \frac{S^2+T^2}{2} \tag{45}$$

olacaktır.

Teorem 5. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\tfrac{1}{4}\|A^*A + AA^*\|_{ber} \le \tfrac{1}{4}\|(A^*A + AA^*)^2 + |A^2 + (A^*)^2|^2\|_{ber}^{1/2} \le ber^2(A). \tag{46}$$

İspat. $A = B + iC$ ifadesi A operatörünün kartezyen ayrışımı olsun. O zaman $B^2 + C^2 = \frac{A^*A+AA^*}{2}$ ve $B^2 - C^2 = \frac{A^2+(A^*)^2}{2}$ olur. (45) eşitsizliğinde sırasıyla S ve T yerine B^2 ve C^2 alınırsa

$$\left(\frac{B^2+C^2}{2}\right)^2 \le \left(\frac{B^2+C^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{|B^2-C^2|}{2}\right)^2 = \frac{B^4+C^4}{2} \tag{47}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\|\left(\frac{B^2+C^2}{2}\right)\right\|_{ber}^2 \le \left\|\left(\frac{B^2+C^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{|B^2-C^2|}{2}\right)^2\right\|_{ber} = \left\|\frac{B^4+C^4}{2}\right\|_{ber} \tag{48}$$

olur. Şimdi eğer $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü $A = B + iC$ kartezyen ayrışıma sahip ise (47) eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 6 dan

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\|A^*A + AA^*\|_{ber}^2 &\le \frac{1}{16}\|(A^*A + AA^*)^2 + |A^2 + (A^*)^2|^2\|_{ber} \\ &= \left\|\frac{B^4 + C^4}{2}\right\|_{ber} \\ &\le \frac{\|B\|_{ber}^4 + \|C\|_{ber}^4}{2} \\ &\le ber^4(A)\end{aligned} \tag{49}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

[7] numaralı kaynağın bazı argümanlarını kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6. Eğer $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $0 \leq \xi \leq 1$ ve $2 \leq p \leq 4$ ise o zaman

$$ber^p(A) \leq \|\xi|A|^p + (1-\xi)|A^*|^p d\xi\|_{ber} \tag{50}$$

sağlanır.

Son sonuç olarak konveks veya operatör konveks fonksiyonlar yardımıyla (50) eşitsizliğinin genelleştirilmiş durumunu aşağıda vereceğiz.

Teorem 7. Eğer $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir artan operatör konveks fonksiyon ise o zaman

$$\begin{aligned} f\left(ber^2(A)\right) &\leq \Bigg\|(1-\xi)f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2) \\ &\qquad -2p\left(\frac{f(|A|^2)+f(|A^*|^2)}{2} - f\left(\frac{|A|^2+|A^*|^2}{2}\right)\right)\Bigg\|_{ber} \\ &\leq \|(1-\xi)f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2)\|_{ber} \end{aligned} \tag{51}$$

eşitsizliği sağlanır. Özel durumda $2 \leq p \leq 4$ için

$$\begin{aligned} \left(ber^p(A)\right) &\leq \left\|(1-\xi)|A|^p + \xi|A^*|^p - 2p\left(\frac{|A|^p+|A^*|^p}{2} - \left(\frac{|A|^2+|A^*|^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\right)\right\|_{ber} \\ &\leq \|(1-\xi)|A|^p + \xi|A^*|^p\|_{ber} \end{aligned} \tag{52}$$

olur.

İspat. K_λ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun. Yardımcı Teorem 5 ten

$$\begin{aligned} &f\left((1-\xi)|A|^2 + \xi|A^*|^2\right) \\ &\quad \leq (1-\xi)f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2) - 2p\left(\frac{f\left(|A|^2 + f(|A^*|^2)\right)}{2} - f\left(\frac{|A|^2+|A^*|^2}{2}\right)\right) \\ &\quad \leq (1-\xi)f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2) \end{aligned} \tag{53}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} &\left\|f\left((1-\xi)|A|^2 + \xi|A^*|^2\right)\right\|_{ber} \\ &\quad \leq \left\|(1-\xi)f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2) - 2p\left(\frac{f\left(|A|^2+f(|A^*|^2)\right)}{2} - f\left(\frac{|A|^2+|A^*|^2}{2}\right)\right)\right\|_{ber} \\ &\quad \leq \|(1-\xi)f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2)\|_{ber} \end{aligned} \tag{54}$$

elde edilir. Diğer taraftan Yardımcı Teorem 4, f fonksiyonunun artanlığı ve AM-GM eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} f(|\langle AK_\lambda, K_\lambda\rangle|^2) &\leq f\left(\langle |A|^{2(1-\xi)}K_\lambda, K_\lambda\rangle\langle |A^*|^{2\xi}K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) \\ &\leq f\left(\langle |A|^2K_\lambda, K_\lambda\rangle^{(1-\xi)}\langle |A^*|^2K_\lambda, K_\lambda\rangle^{\xi}\right) \\ &\leq f\left((1-\xi)\langle |A|^2K_\lambda, K_\lambda\rangle + \xi\langle |A^*|^2K_\lambda, K_\lambda\rangle\right) \\ &\leq f(\langle (1-\xi)|A|^2 + \xi|A^*|^2K_\lambda, K_\lambda\rangle) \end{aligned} \tag{55}$$

olup üstteki eşitsizlikten $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$f\left(ber^2(A)\right) \leq \left\| f\left((1-\xi)|A|^2 + \xi |A^*|^2\right)\right\|_{ber} \tag{56}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} & f\left(ber^2(A)\right) \\ & \leq \left\| (1-\xi) f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2) - 2p\left(\frac{f(|A|^2) + f(|A^*|^2)}{2} - f\left(\frac{|A|^2 + |A^*|^2}{2}\right)\right)\right\|_{ber} \\ & \leq \|(1-\xi) f(|A|^2) + \xi f(|A^*|^2)\|_{ber} \end{aligned} \tag{57}$$

elde edilir. Bu ise (52) durumunu sağlar. $f(\xi) = \xi^p$, $1 \leq p \leq 2$ alınırsa ve (51) uygulanırsa özel durumdaki (52) eşitsizliği elde edilir.

IV. KAYNAKLAR

[1] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels," *Transactions of The American Mathematical Society*, vol. 68, pp. 337-404, 1950.

[2] M. Bakherad and M.T. Garayev, "Berezin number inequalities for operators," *Concrete Operators*, vol. 6, no. 1, pp. 33-43, 2019.

[3] H. Başaran, M. Gürdal and A. N. Güncan, "Some operator inequalities associated with Kantorovich and Hölder-McCarthy inequalities and their applications," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 1, pp. 523-532, 2019.

[4] H. Başaran, M. B. Huban and M. Gürdal, "Inequalities related to Berezin norm and Berezin number of operators," preprint, 2021.

[5] F. A. Berezin, "Covariant and contravariant symbols for operators," *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 6, pp. 1117-1151, 1972.

[6] S. S. Dragomir, "Hermite-Hadamard 's type inequalities for operator convex functions," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, no. 3, pp. 766-772, 2011.

[7] M. El-Haddad and F. Kittaneh, "Numerical radius inequalities for Hilbert space operators (II)," *Studia Mathematica*, vol. 182, no. 2, pp. 133-140, 2007.

[8] T. Furuta, "A simplified proof of Heinz inequality and scrutiny of its equality," *American Mathematical Society*, vol. 97, no. 4, pp. 751-753, 1986.

[9] M. T. Garayev, "Berezin symbols, Hölder-McCarthy and Young inequalities and their applications," *Proceedings of Institude of Mathematics and Mechanics*. *National Academy of Sciences of Azerbaijan*, vol. 43, no. 2, pp. 287-295, 2017.

[10] M. Garayev, F. Bouzeffour, M. Gürdal and C. M. Yangöz, "Refinements of Kantorovich type, Schwarz and Berezin number inequalities," *Extracta Mathematicae*, vol. 35, pp. 1-20, 2020.

[11] M. T. Garayev, M. Gürdal and A. Okudan, "Hardy-Hilbert's inequality and a power inequality for Berezin numbers for operators," *Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 19, pp. 883-891, 2016.

[12] M. T. Garayev, M. Gürdal and S. Saltan, “Hardy type inequaltiy for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems,” *Positivity*, vol. 21, pp. 1615-1623, 2017.

[13] M. T. Garayev, H. Guedri, M. Gürdal and G.M. Alsahli, “On some problems for operators on the reproducing kernel Hilbert space,” *Linear Multilinear Algebra*, vol. 69, no. 11, pp. 2059-2077, 2021.

[14] M. Garayev, S. Saltan, F. Bouzeffour and B. Aktan, “Some inequalities involving Berezin symbols of operator means and related questions,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales Serie A: Matematicas RACSAM*, vol. 114, no. 85, pp. 1-17, 2020.

[15] K. E. Gustafson and D. K. M. Rao, *Numerical Range*, New York, USA: Springer-Verlag, 1997.

[16] M. Hajmohamadi, R. Lashkaripour and M. Bakherad, “Improvements of Berezin number inequalities,” *Linear Multilinear Algebra*, vol. 68, no. 6, pp. 1218-1229, 2020.

[17] M. B. Huban, H. Başaran and M. Gürdal, “New upper bounds related to the Berezin number inequalities,” *Journal of Inequalities and Special Functions*, vol. 12, no. 3, pp. 1-12, 2021.

[18] M. T. Karaev, “Berezin set and Berezin number of operators and their applications,” in *The 8th Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii (WONRA -06)*, Bremen, Germany, University of Bremen, July 2006, pp. 14.

[19] M. T. Karaev, “Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces,” *Journal of Functional Analysis*, vol. 238, pp. 181-192, 2006.

[20] M. T. Karaev, “Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory,” *Complex Analysis and Operator Theory*, vol. 7, pp. 983-1018, 2013.

[21] F. Kittaneh, “Notes on some inequalities for Hilbert space operators,” *Publications of the Research Institude for Mathematical Sciences*, vol. 24, pp. 283-293, 1988.

[22] F. Kittaneh, “A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Frobenius companion matrix,” *Studia Mathematica*, vol. 158, no. 1, pp. 11-17, 2003.

[23] F. Kittaneh, “Numerical radius inequalities for Hilbert space operators,” *Studia Mathematica*, vol. 168, no. 1, pp. 73-80, 2005.

[24] B. Mond and J. Pečarić, “On Jensen's inequality for operator convex functions,” *Houston Journal of Mathematics*, vol. 21, pp. 739-753, 1995.

[25] H. R. Moradi and M. Sabahheh, “More accurate numerical radius ineinequalities (II),” *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 69, no. 5, pp. 921-933, 2021.

[26] M. Sababheh, “Convexity and matrix means,” *Linear Algebra Applications*, vol. 506, pp. 588-602, 2016.

[27] M. Sababheh, “Numerical radius inequalities via convexity,” *Linear Algebra Applications*, vol. 549, pp. 67-78, 2018.

[28] M. Sababheh and H. R. Moradi, “More accurate numerical radius inequalities (I),” *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 69, no. 10, pp. 1964-1973, 2021.

[29] S. S. Sahoo, N. Das and D. Mishra, “Berezin number and numerical radius inequalities for operators on Hilbert spaces,” *Advances in Operator Theory*, vol. 5, pp. 714-727, 2020.

[30] R. Tapdigoglu, “New Berezin symbol inequalities for operators on the reproducing kernel Hilbert space,” *Operators and Matrices*, vol. 15, no. 3, pp. 1031-1043, 2021.

[31] U. Yamancı and M. Gürdal, “On numerical radius and Berezin number inequalities for reproducing kernel Hilbert space,” *New York Journal of Mathematics*, vol. 23, pp. 1531-1537, 2017.

[32] U. Yamancı, M. Gürdal and M. T. Garayev, “Berezin number inequality for convex function in reproducing kernel Hilbert space,” *Filomat*, vol. 31, pp. 5711-5717, 2017.

[33] U. Yamancı, R. Tunç and M. Gürdal, “Berezin numbers, Grüss type inequalities and their applications,” *Bulletin Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 43, pp. 2287-2296, 2020.