Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Sciences

AKÜ-FEBİD **11** (2011) 011301 (1-7) AKU-J. Sci. **11** (2011) 011301 (1-7)

Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi

Esin Köksal Babacan ve **Cenker Biçer**

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Sistem Belirleme ve Simülasyon Laboratuarı, ANKARA

e-posta: ekoksal@science.ankara.edu.tr ve cbicer@science.ankara.edu.tr

Geliş Tarihi: 14 Ekim 2011; Kabul Tarihi: 25 Aralık 2011

Anahtar kelimeler
Artırılmış durum Kalman Filtresi; İki Aşamalı Kalman Filtresi; Rasgele sapma

Özet

Kalman Filtresi yönteminde sistem dinamiği, parametreleri ve istatistiksel özelliklerinin tam olarak bilindiği varsayımı yapılır. Fakat birçok gerçek uygulamada sistem modeli bilinmeyen rasgele veya sabit sapmalar içerir ve bu nedenle Kalman Filtresinde ıraksamalar meydana gelebilir. Bu bilinmeyen sabit veya rasgele sapmaların modele dahil edilmesi ile elde edilen Artırılmış Durum Kalman Filtresi hesaplama yükünün artması ve ortaya çıkan birtakım sayısal problemlerden dolayı tercih edilmemektedir. Friedland (1969), optimum tahmin edicinin ilk olarak sapmanın sıfır olduğu durumda filtreyi işletip daha sonra sapma için elde edilen filtredeki sonuca göre, filtrede düzeltme yapılarak elde edilebileceğini önermiştir. İki Aşamalı Kalman Filtresi olarak adlandırılan bu yöntem uzun yıllardır araştırmacıların ilgisini çeken bir konu olmuş ve değişik biçimlerde İki Aşamalı Kalman Filtreleri önerilmiştir. Bu çalışmada, durum-uzay modelinde rastgele bir sapma olduğu durumda filtreyi her adımda uyarlayan yeni bir yaklaşım olarak Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi önerilmiş ve yapılan bir simülasyon çalışması ile elde edilen sonuçlar Artırılmış Durum ve İki Aşamalı Kalman Filtreleri ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi ile elde edilen hata kareler ortalaması, Artırılmış Durum ve İki Aşamalı Kalman Filtreleri ile elde edilen hata kareler ortalamalarından daha düşük çıkmıştır.

Adaptive Two Stage Kalman Filter

Key words
Augmented State Kalman Filter; Two Stage Kalman Filter; Random Bias

Abstract

In Kalman Filter method, they assume that dynamics, parameters and statistical properties of the system are exactly known. But, for many real applications system model has unknown random or constant bias and because of that reason, there can be divergences in Kalman Filter. Because of the computational complexity of Augmented State Kalman Filter which is obtained after adding these unknown constant or random biases into the model and because of some numerical problems which appear, Augmented State Kalman Filter is not prefered. Friedland (1969) proposed that optimum estimator can be obtained by running the filter when bias is equal to 0 firstly, then correcting the filter according to the result which is obtained for bias in the filter. The method called the Two Stage Kalman Filter has been a subject which has attracted attention of researchers for many years and Two Stage Kalman Filters have been proposed in different forms. In this study, we propose a new Two Stage Adaptive Fading Kalman Filter which will adapt the filter at every step when there is a random bias in state-space model and results that are obtained by simulation study are discussed.

1. Giriş

Geleneksel Kalman Filtresi yönteminde sistem dinamiğinin, parametrelerinin ve istatistiksel özelliklerin tam olarak bilindiği varsayılır. Fakat birçok gerçek uygulamada sistem modeli bilinmeyen rasgele veya sabit sapmalardan etkilenir ve bu nedenle Kalman Filtresinde ıraksamalar meydana gelir. Bu bilinmeyen sabit veya rasgele sapmaların durum denklemine eklenmesiyle Artırılmış Durum Kalman Filtresi elde edilir. Fakat hesaplamaların artması ve sayısal bir takım problemlerden dolayı Artırılmış Durum Kalman Filtresi yerine sapma ve durum tahmininin paralel iki algoritmaya göre elde edildiği İki Aşamalı Kalman Filtresi olarak bilinen yöntem son zamanlarda daha çok tercih edilmektedir. İki aşamalı Kalman Filtresini sabit sapma içeren durum-uzay modelleri için ilk kez Friedland (1969) önermiştir. Daha sonra araştırmacılar tarafından bilinmeyen sabit sapmalı durum-uzay modelleri için Friedland' ın modeline alternatif olarak İki Aşamalı Kalman Filtreleri önerilmiştir. Son zamanlarda İki Aşamalı Kalman Filtresi sadece sabit sapma durumunda değil rasgele sapma olması durumunda da çeşitli araştırmacılar tarafından önerilmiştir. Fakat yapılan bu türetimlerde rasgele sapmanın istatistiksel özelliklerinin bilindiği varsayımı vardır ki gerçekte bu bilgiler ya kısmen mevcuttur ya da hiç yoktur. Bu çalışmada, bu probleme çözüm önerebilmek amacı ile bir Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi önerilmiş ve simülasyon çalışması ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde rasgele sapma içeren lineer durum-uzay modeli tanıtılmış ve Artırılmış Durum Kalman Filtresi ile İki Aşamalı Kalman Filtresi verilmiştir. Üçüncü bölümde Uyarlı Kalman Filtresinin türetimi anlatılmış ve süreç gürültüsünün ölçeklendirilmesi ile Kalman Filtresinin elde edilişi verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında bahsedilen bu yöntem İki Aşamalı Kalman Filtresinin uyarlanmasında kullanılarak yeni bir Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi önerilmiştir. Dördüncü bölümde önerilen Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi ile Artırılmış Durum Kalman Filtresi ve İki Aşamalı Kalman Filtresinin performanslarını karşılaştırmak amacı ile bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Son bölümde de çalışmayla ilgili bir takım sonuçlara yer verilmiştir.

2. Problem Formülüzasyonu

Lineer stokastik durum-uzay modeli,

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fb_k + \mathrm{w}_k^x \tag{1a}$$

$$b_{k+1} = b_k + w_k^b \tag{1b}$$

$$y_k = Cx_k + Gb_k + \mathrm{v}_k \tag{1c}$$

biçiminde verilsin (Keller and Darouach, 1997). Burada $x_k \in R^n$ durum vektörü, $y_k \in R^m$ gözlem vektörü, $u_k \in R^r$ bilinen kontrol girdisi, b_k bilinmeyen rasgele sapma vektörüdür. A, B, F, C, G boyutları uygun şekilde verilmiş matrislerdir. w_k^x, w_k^b ve v_k birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı, ilişkisiz rasgele gürültü vektörleri ve

$$E\left\{\begin{bmatrix} w_k^x \\ w_k^b \\ v_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_k^x & w_k^b & v_k \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} W^x & 0 & 0 \\ 0 & W^b & 0 \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix}\delta_{kj} \tag{2}$$

$W^x > 0$, $W^b > 0$, $V > 0$ ve δ_{kj} Kronecker delta fonksiyonudur. Başlangıç durumları x_0 ve b_0 için, $E(x_0) = \overline{x}_0$, $E(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)' = P_0^x > 0$, $E(b_0) = \overline{b}_0$, $E(b_0 - \overline{b}_0)(b_0 - \overline{b}_0)' = P_0^b > 0$ ve $E(x_0 - \overline{x}_0)(b_0 - \overline{b}_0)' = P_0^{xb}$ ile normal dağılıma sahip rasgele vektörler olduğu varsayımı yapılsın.

2.1. Artırılmış durum kalman filtresi

Yukarıda verilen koşullar altında; rasgele sapmanın durum vektörüne eklenmesi için durum-uzay modelinde yer alan matrisler,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\delta_{kj}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} C & G \end{bmatrix} \tag{3a}$$

biçiminde tanımlanır ve bu durumda durum uzay modeli

$$X_{k+1} = \overline{A}X_k + \overline{B}u_k + \overline{\mathrm{w}}_k \tag{3b}$$

$$y_k = \overline{C}X_k + v_k \tag{3c}$$

olarak elde edilir.

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ b_k \end{bmatrix}, \overline{w}_k = \begin{bmatrix} w_k^x \\ w_k^b \end{bmatrix}$$

$$\overline{W} = E\left(\overline{w}_k \overline{w}_j^T\right) = \begin{bmatrix} W^x & 0 \\ 0 & W^b \end{bmatrix}\delta_{kj}$$

olmak üzere, Artırılmış Durum Kalman Filtresi aşağıdaki şekilde verilir (Keller and Darouach, 1997).

$$X_{k+1|k+1} = X_{k+1|k} + K_{k+1}\left[y_{k+1} - \overline{C}X_{k+1|k}\right] \tag{4a}$$

$$X_{k+1|k} = \overline{A}X_{k|k} + \overline{B}u_k \tag{4b}$$

$$P_{k+1|k} = \overline{A}P_{k|k}\overline{A}' + \overline{W} \tag{4c}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}\overline{C}^{'}(\overline{C}P_{k+1|k}\overline{C}^{'} + V)^{-1} \qquad (4d)$$

$$P_{k+1|k+1} = \left(I - K_{k+1}\overline{C}\right)P_{k+1|k} \qquad (4e)$$

$$P_{k|k} = \begin{bmatrix} P^{x}_{k|k} & P^{xb}_{k|k} \\ P^{bx}_{k|k} & P^{b}_{k|k} \end{bmatrix} = E\left\{\left[X_{k|k} - X_{k}\right]\left[X_{k|k} - X_{k}\right]^{'} \middle| y_{k}, y_{k-1}, \ldots, y_{1}\right\} \qquad (4f)$$

ve başlangıç değerleri,

$$X_{0|0} = \begin{bmatrix} \overline{x}_0 \\ \overline{b}_0 \end{bmatrix}, \quad P_{0|0} = \begin{bmatrix} P_0^{x} & P_0^{xb} \\ P_0^{bx} & P_0^{bb} \end{bmatrix}$$

dir.

2.2. İki aşamalı kalman filtresi

Burada Keller ve Darouach tarafından verilen İki Aşamalı Kalman Filtresi ele alınacaktır.

Düzenlenmiş yansız durum-tahmini (n-boyutlu filtre);

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + \hat{K}^{x}_{k+1}\tilde{\gamma}_{k+1} \qquad (5a)$$

$$\hat{P}^{x}_{k+1|k+1} = \left(\hat{P}^{-1}_{k+1|k+1} + \overline{C}^{'}V^{-1}\overline{C}\right)^{-1} \qquad (5b)$$

$$\tilde{x}_{k+1|k} = A\tilde{x}_{k|k} + Bu_{k} + r_{k}b_{k|k} - \beta_{k+1|k}b_{k|k} \qquad (5c)$$

$$\tilde{P}^{x}_{k+1|k} = A\tilde{P}^{x}_{k|k}A^{'} + W^{x} + r_{k}P^{b}_{k|k}r^{'}_{k} - \beta_{k+1|k}P^{b}_{k+1|k}\beta^{'}_{k+1|k} \qquad (5d)$$

$$\hat{K}^{x}_{k+1} = \hat{P}^{x}_{k+1|k+1}\overline{C}^{'}V^{-1} \qquad (5e)$$

$$\tilde{\gamma}_{k+1} = y_{k+1} - C\tilde{x}_{k+1|k} \qquad (5f)$$

Optimal Yan Tahmini (p-boyutlu filtre);

$$b_{k+1|k} = b_{k|k} \qquad (6a)$$

$$P^{b}_{k+1|k} = P^{b}_{k|k} + W^{b} \qquad (6b)$$

$$b_{k+1|k+1} = b_{k|k} + K^{b}_{k+1}\left(\tilde{\gamma}_{k+1} - H_{k+1|k}b_{k|k}\right) \qquad (6c)$$

$$P^{b}_{k+1|k+1} = \left({P^{b}_{k+1|k+1}}^{-1} + H^{'}_{k+1|k}V^{-1}H^{'}_{k+1|k+1}\right)^{-1} \qquad (6d)$$

$$K^{b}_{k+1} = P^{b}_{k+1|k+1}H^{'}_{k+1|k}V^{-1} \qquad (6e)$$

eşlik eden denklemler,

$$r_{k} = A\beta_{k|k} + F \qquad (7a)$$

$$\beta_{k+1|k} = r_{k}P^{b}_{k|k}{P^{b}_{k+1|k}}^{-1} \qquad (7b)$$

$$H_{k+1|k} = G + C\beta_{k+1|k} \qquad (7c)$$

$$\beta_{k+1|k+1} = \beta_{k+1|k} - \hat{K}^{x}_{k+1}H_{k+1|k} \qquad (7d)$$

$$H_{k+1|k+1} = G + C\beta_{k+1|k+1} \qquad (7e)$$

olmak üzere optimal İki Aşamalı Kalman tahmini,

$$X_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k+1} + B_{k+1|k+1}b_{k+1|k+1} \qquad (8a)$$

$$P^{x}_{k+1|k+1} = \hat{P}^{x}_{k+1|k+1} + \beta_{k+1|k+1}P^{b}_{k+1|k+1}\beta^{'}_{k+1|k+1} \qquad (8b)$$

biçiminde elde edilir.

3. Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi

3.1 Uyarlı kalman filtresi

Filtreleme problemi formüle edilirken sistem gürültü süreçlerinin kovaryans matrislerinin ve modelde yer alan matrislerin tam olarak bilindiği varsayımı yapılır. Bu matrisler tam olarak bilindiğinde Kalman Filtresi optimal sonucu verir (Özbek, 1998). Ancak birçok uygulamada bu matrisler tam olarak bilinmez ya da yanlış bilinir. Bu filtrenin performansını olumsuz yönde etkileyebilir ve filtre tahminlerinde ıraksama meydana gelebilir (Kim vd., 2007). Bu problemin üstesinden gelebilmek için araştırmacılar tarafından çok sayıda çalışma yapılmış ve çeşitli uyarlı filtreler önerilmiştir. Ancak her durumu göz önüne alan ve filtre tahminlerindeki ıraksama problemini ortadan kaldıran bir yöntem halen mevcut değildir.

Kalman Filtresi tahminlerinde meydana gelebilecek ıraksama problemini ilk olarak ele alan ve bunun önemini belirten araştırmacılar Fagin (1964) ve Fitzgerald (1971)'dır. Mehra (1972), modelde yer alan kovaryans matrislerinin bilinmemesi durumunu incelemiş ve bu kovaryans matrislerinin tahmin edilmesiyle uyarlanan bir Kalman Filtresi önermiştir.

Mohamed ve Schwarz (1999), Mehra (1972)'nin önerdiği yönteme benzer bir biçimde, gözlemlerin parametrelere göre koşullu dağılımını kullanarak, gürültü süreçlerinin kovaryans matrislerinin filtre içerisinde tahmin edilmesine dayalı bir Uyarlı Kalman Filtresi önermişlerdir.

Gustafsson (1992), filtre gürültü kovaryanslarının yanlış olması durumunda filtrenin davranışını incelemiş ve gürültü kovaryanslarının aynı katsayı ile ağırlıklandırıldığında Kalman Filtresinde meydana gelen tek değişikliğin hata kovaryans matrisinde olduğunu göstermiştir.

Saab (1999), istatistiksel modelleme hatası olduğunda kesikli-zaman Kalman Filtresinin hataya olan duyarlılığını yaptığı çalışma ile ortaya koymuştur.

Kalman Filtresinde tahminler geçmiş verilere dayanarak yapıldığından; eğer geçmiş veriler hatalı model kullanımından dolayı anlamını yitirmişlerse bu verilerin güncel durum tahminine olan etkilerini azaltmak gerekir. Fagin (1964), bu amaçla yeni gözlemlerin eski gözlemlere göre daha çok bilgi içerebileceğini göz önünde bulundurarak gözlemlerin üstel olarak ağırlıklandırılabileceğini önermiştir. Xia vd. (1994) bu metodu durum-uzay modeline uyarlayarak modelin hatalı oluşturulması durumunda filtrelemede bazı güçlendirmelerin yapılmasını sağlayacak unutma faktörünün hesaplanması için çeşitli algoritmalar önermiştir. Özbek ve Aliev (1998), yaptıkları çalışmada Xia ve diğerleri (1994) tarafından önerilen unutma faktörünün modelde nasıl yer alması gerektiğini göstermişlerdir.

Kim vd. (2006), sisteme bilinmeyen rasgele bir girdinin olduğu durumu incelemişler ve Kalman Filtresinin bu duruma uyum sağlayacak biçimde skaler bir unutma faktörü ile uyarlanmasını elde etmişlerdir.

Jwo ve Weng (2008), Kalman Filtresi tahminlerinde güçlendirme yapmak için hata kovaryans matrisinin ve gözlem gürültü sürecinin kovaryans matrisinin gelen veri ile uyum içerisinde olacak biçimde ölçeklendirilmesi gerektiğini belirtmişlerdir ve ölçek faktörlerinin seçimi için bir yöntem vermişlerdir.

Ding vd. (2007), gürültü kovaryans matrisinin bir ölçek parametresi kullanılarak filtre içerisinde ölçeklendirilmesiyle bir uyarlı filtre önermişlerdir. Ayrıca Ding vd. (2007) yaptıkları çalışmada ölçek parametresinin filtre eşitliklerinde nasıl yer alması gerektiğini belirtmiş ve ölçek parametresinin seçimi için bir yöntem önermişlerdir.

3.1.1. Süreç gürültüsünün ölçeklendirilmesi ile kalman filtresinin uyarlanması

Durum-uzay modeli,

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \tag{9a}$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{9b}$$

şeklinde olsun. $x_k \in R^q$ sistem durum vektörü, $y_k \in R^m$ sistem gözlem vektörü, $u_k \in R^p$ sistem kontrol vektörü olmak üzere model varsayımları,

$$E(x_0) = \bar{x}_0,\quad E(w_k) = 0,\quad E(v_k) = 0,$$

$$Cov(x_0) = E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] = P_0$$

$$E(w_k w_j') = \begin{cases} Q_k, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases},\quad Cov(v_k v_j') = \begin{cases} R_k, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases},$$

$$E(w_j v_k') = 0,\quad E(x_0 w_k') = 0,\quad E(x_0 v_k') = 0$$

biçimindedir. Buna göre Kalman Filtresi,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1} \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k[y_k - H\hat{x}_{k|k-1}] \\ K_k &= P_{k|k-1}H_k'(H_k P_{k|k-1}H_k' + R_k)^{-1} \\ P_{k|k-1} &= AP_{k-1}A' + Q_{k-1} \\ P_k &= (I - K_k H_k)P_{k|k-1} \end{aligned} \tag{10}$$

eşitlikleri ile verilir (Chui and Chen, 1991). İnnovasyon serisi,

$$d_k = y_k - H\hat{x}_{k|k-1} \tag{11}$$

ile tanımlanmak üzere filtre optimal ise d_k sıfır ortalamalı beyaz gürültü vektörü olur ve

$$E\left(d_k d_k'\right) = HP_{k|k-1}H + R_k \tag{12}$$

dir. İnnovasyon kovaryansı elimizde olduğunda gözlem hatası kovaryansı R_k bu formülden tahmin edilebilir. İnnovasyon kovaryansı innovasyon gözlemlerinden;

$$E\left(d_k d_k'\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} d_{k-i}d_{k-i}' \tag{13}$$

ifadesi ile hesaplanır (Ding vd., 2007).

Optimal filtre durumunda, öngörülen innovasyon kovaryansı ile innovasyon gözlemlerinden hesaplanan kovaryansın aynı olması gerekir. Yani,

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} d_{k-i} d_{k-i}^{'} = H\tilde{P}_{k|k-1}H + R_k \qquad (14)$$

olmalıdır. Bu ikisi arasındaki fark $P_{k|k-1}$ ve/ veya R_k nın yanlış tanımlanmasından kaynaklanabilir. $\tilde{P}_{k|k-1}$ süreç gürültü öngörüsünün tahmini olmak üzere, $\tilde{P}_{k|k-1}$, i bu eşitlikten çözmek pratik değildir. Bunu basitleştirmek için, bir ölçeklendirme faktörü aşağıda tanımlanmıştır (Ding vd., 2007).

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{trace\left\{H\tilde{P}_{k|k-1}H\right\}}{trace\left\{H\tilde{P}_{k|k-1}H\right\}} \\ &= \frac{trace\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} d_{k-i}d_{k-i}^{'} - R_k\right\}}{trace\left\{H\tilde{P}_{k|k-1}H\right\}} \\ &= \frac{trace\left\{H\left(A\tilde{P}_{k-1}A^{'} + \tilde{Q}_{k-1}\right)H'\right\}}{trace\left\{H\left(A\tilde{P}_{k-1}A^{'} + Q_{k-1}\right)H'\right\}}\end{aligned} \qquad (15)$$

Bu faktör, hesaplanan innovasyon kovaryansı ile öngörülen kovaryansın oranıdır ki buna göre sezgisel adaptasyon kuralı,

$$\tilde{Q}_k = Q_{k-1}\sqrt{\alpha} \qquad (16)$$

biçiminde tanımlanır. İfadede yer alan kareköklü ifade düzgünleştirme etkisi olarak denkleme ilave edilmiştir (Ding ve diğerleri, 2007).

3.2 Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi

İki Aşamalı Kalaman Filtresinde hem durum hem de sapma tahminleri bulunduğundan burada iki tane innovasyon serisi vardır. (5a)-(7e) eşitlikleri ile verilen İki Aşamalı Kalman Filtresinde innovasyon serisi;

$$\tilde{\gamma}_{k+1} = y_{k+1} - C\tilde{x}_{k+1|k} \qquad (17)$$

olmak üzere,

$$E\left(\tilde{\gamma}_{k+1}\tilde{\gamma}_{k+1}^{'}\right) = C\tilde{P}_{k+1|k}C' + GE(b_{k+1}b_{k+1}^{'})G' + R_k \qquad (18)$$

olarak elde edilir. Benzer biçimde sapma için innovasyon serisi;

$$\tilde{\gamma}_{b,k+1} = \tilde{\gamma}_{k+1} - H_{k+1|k}b_{k+1|k}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}E\left(\tilde{\gamma}_{b,k+1}\tilde{\gamma}_{b,k+1}^{'}\right) &= C\tilde{P}_{k+1|k}^{x}C^{'} + GP_{k+1|k}^{b}G^{'} + R_k \\ &\quad - C\beta_{k+1|k}E\left(b_{k+1|k}b_{k+1|k}^{'}\right)\beta_{k+1|k}^{'}C^{'}\end{aligned} \qquad (19)$$

olarak elde edilir.

Optimal filtre için, hesaplanan innovasyon kovaryansları ile tahmin edilen innovasyon kovaryanslarının eşit olması gereğinden hem durum hem de sapma tahminleri için gerekli eşitlikler yazılırsa,

$$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\gamma}_{k+1-i}\tilde{\gamma}_{k+1-i}^{'} = C\tilde{P}_{k+1|k}^{x}C^{'} + GE(b_{k+1}b_{k+1}^{'})G^{'} + R_k$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\gamma}_{b,k+1-i}\tilde{\gamma}_{b,k+1-i}^{'} &= C\tilde{P}_{k+1|k}^{x}C^{'} + GP_{k+1|k}^{b}G^{'} + R_k \\ &\quad - C\beta_{k+1|k}E\left(b_{k+1|k}b_{k+1|k}^{'}\right)\beta_{k+1|k}^{'}C^{'}\end{aligned}$$

olup, hem durum hem de sapmalar için ölçeklendirme parametresinin hesaplanması gerekir. Buna göre,

$$\alpha_1^x = \frac{trace\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\gamma}_{k+1-i}\tilde{\gamma}_{k+1-i}^{'} - GE(b_{k+1}b_{k+1}^{'})G' - R_k\right\}}{trace\left\{C\tilde{P}_{k+1|k}^{x}C'\right\}} \qquad (20)$$

$$\alpha_2^b = \frac{trace\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\gamma}_{b,k+1-i}\tilde{\gamma}_{b,k+1-i}^{'} - C\tilde{P}_{k+1|k}^{x}C' - R_k + C\beta_{k+1|k}E\left(b_{k+1|k}b_{k+1|k}^{'}\right)\beta_{k+1|k}^{'}C'\right\}}{trace\left\{GP_{k+1|k}^{b}G'\right\}} \qquad (21)$$

olarak elde edilir ve İki Aşamalı Kalman Filtresinde, (5d) eşitliği yerine

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{k+1|k}^{x} &= A\tilde{P}_{k|k}^{x}A^{'} + \sqrt{\alpha_1^x}W^x \\ &\quad + r_k P_{k|k}^{b}r_k^{'} - \beta_{k+1|k}P_{k+1|k}^{b}\beta_{k+1|k}^{'}\end{aligned} \qquad (22)$$

eşitliği ve (6b) eşitliği yerine

$$P_{k+1|k}^{b} = P_{k|k}^{b} + \sqrt{\alpha_2^b}W^b \qquad (23)$$

eşitliklerinin alınması ile Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi elde edilmiş olur.

4. Simülasyon Çalışması

Modelimiz,

$$
\begin{aligned}
x_{1,k+1} &= x_{1,k} + .1x_{2,k} + .1b_k + \mathrm{w}_k^x \\
x_{2,k+1} &= -.1x_{1,k} + .6x_{2,k} + .1x_{3,k} + .3b_k + \mathrm{w}_k^x \\
x_{3,k+1} &= .4x_{2,k} + .6x_{3,k} + .2b_k + \mathrm{w}_k^x \\
b_{k+1} &= .2b_k + w_k^b \\
y_k &= \begin{bmatrix} x_{1,k} + .3b_k \\ x_{3,k} + .1b_k \end{bmatrix} + v_k
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

olsun. Burada hem x_1, x_2, x_3 durum değişkenleri hem de y_1, y_2 gözlem değişkenleri b gibi bir sapmadan etkilenmektedir. Simülasyon çalışmasında amaç, sapmadan etkilenen durum değişkenlerinin ve sapmanın tahminidir. Aynı başlangıç değerleri verilerek başlatılan filtrelere göre elde edilen hata kareler ortalaması sonuçları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

	Hata Kareler Ortalaması		
	Artırılmış Durum Kalman Filtresi	**İki Aşamalı Kalman Filtresi**	**Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi**
x_1	4.1714	16.0817	3.5766
x_2	3.6724	15.5732	2.5738
x_3	4.7600	16.2665	3.4355
b	20.4162	52.7785	20.3148

5. Sonuç

Bu çalışmada, rasgele sapma içeren durum-uzay modellerinde, önsel bilgilerin az olmasından kaynaklanan ıraksamayı giderebilmek için, İki Aşamalı Kalman Filtresinde durum ve sapma gürültü kovaryans matrislerinin ölçeklendirilmesi ile elde edilen bir Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi önerilmiştir. Filtrenin performansını görmek amacıyla bir simülasyon çalışması yapılmış ve hata kareler ortalaması anlamında Artırılmış Durum Kalman Filtresi, İki Aşamalı Kalman Filtresi ve önerilen Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresi tahmin sonuçları karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçlarına göre önerilen filtrenin hata kareler ortalaması diğer bahsedilen filtrelere göre daha düşük çıkmıştır. Buna göre, önerilen Uyarlı İki Aşamalı Kalman Filtresinin kullanılması ile gerçek değerlere daha yakın tahminler elde edilebilir.

Kaynaklar

Chui, C.K. ve Chen, G., 1991. Kalman Filtering with Real-time Applications, Springer-Verlag.

Ding, W., Wang, J., Rizos, C. ve Kinlyside, D. 2007. Improving Adaptive Kalman Estimation in GPS/INS Integration. The Journal of Navigation, 60, 517–529.

Fagin, S.L., 1964. Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis Optimal System. IEEE Int. Conv. Rec., 12, 216-240.

Friedland, B., 1969. Treatment of bias in recursive filtering. IEEE Trans. Automat. Control, 14, 359-367.

Fitzgerald, R.J., 1971. Divergence Of The Kalman Filter. IEEE Trans. Auto. Control, 16, 736-747.

Gustafsson, F., 1992. Estimation of Discrete Parameters in Linear Systems. Phd. Thesis. Department of Electrical Engineering. Linkoping University, Sweden.

Jwo, D.-J. ve Weng, T.-P., 2008. An Adaptive Sensor Fusion Method with Applications in Integrated Navigation. The Journal of Navigation, 61, 705-721.

Keller, J.Y. ve Darouach, M., 1997. Optimal two-stage Kalman filter in the presence of random bias. Automatica, 33, 1745-1748.

Kim, K.H., Lee, J.G. ve Park, C.G., 2006. Adaptive Two Stage Kalman Filter in the Presence of Unknown Random Bias. Int. J. Adapt. Control Signal Process, 20, 305-319.

Kim, K.H., Lee, J.G., Park, C.G. ve Jee, G.I., 2007. The Stability Analysis of the Adaptive Fading Extended Kalman Filter, 16th IEEE International Conference on Control 1-3 October 2007 Singapore.

Mehra, R.K., 1972. Approachs to Adaptive Filtering. IEEE Trans. Auto. Control, 17, 693-698

Mohamed, A.H. ve Schwarz, K.P., 1999. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. Journal of

Geodesy, 73, 193-203.

Özbek, L., 1998. Kesikli Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İndirgemeli Tahmin ve Yakınsama Problemleri, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Yayımlanmamış Doktora Tezi.

Özbek, L. ve Aliev, F., 1998. Comments on Adaptive Fading Kalman Filter with an Application. Automatica, 34, 1663-1664.

Saab, S.S. ve Nasr, G.E., 1999. Sensitivity of Discrete-Time Kalman Filter to Statistical Modeling Errors. Optimum Control Application Methods, 20, 249-259.

Xia, Q., Rao, M., Ying, Y., Shen, S.X. ve Sun, Y., 1992. A new state estimation Algorithm-Adaptive Fading Kalman Filter, Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona.

Xia, Q., Rao, M., Ying, Y. ve Shen, X., 1994. Adaptive Fading Kalman Filter with an Applications. Automatica, 30, 1333-1338.