**Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi**
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

**Araştırma Makalesi / Research Article**
**DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1355553**
AKÜ FEMÜBİD **24** (2024) 021303 (273-276) AKU J. Sci. Eng. **24** (2024) 021303 (273-276)

# Palindromik Dönüşümler Yarıgrubunun Üst Rankı

## Upper Rank of Palindromic Transformations Semigroup

***Makale Bilgisi / Article Info**
Alındı/Received: 05.09.2023
Kabul/Accepted: 10.03.2024
Yayımlandı/Published: 29.04.2024

**Osman KELEKCİ***

*Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 51240, Niğde.*



## Öz

Tam dönüşümler yarıgubu olarak isimlendilen $T_n$, fonksiyonların bileşke işlemine göre sonlu bir $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ kümesi üzerinde tanımlanan bütün fonksiyonların yarıgrubudur. Bu dönüşümler içerisinden seçilen tüm palindrom imajlı dönüşümlerin kümesi bir yarıgrup teşkil eder ve $P_n$ ile gösterilir. Bu çalışmada $T_n$ nin bir alt yarıgrubu olan palindromik dönüşümler yarıgrubu $P_n$ nin üst rankı için bir alt sınır hesaplanmıştır.

***Anahtar Kelimeler:** Palindrom; Bağımsızlık; Dönüşüm Yarıgrubu; Rank.*

## Abstract

The full transformations semigroup $T_n$, is the semigroup of all functions defined on a finite set $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ according to the composition operation of the functions. The set of all palindrome image transformations selected among these transformations forms a semigroup and is denoted by $P_n$. In this study, a lower bound was calculated for the upper rank of the palindromic transformations semigroup $P_n$, which is a sub semigroup of $T_n$.

***Keywords:** Palindrome; Independency; Transformation Semigroup; Rank.*

## 1. Giriş

Sonlu bir $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ kümesinden yine $X_n$ e tanımlanabilecek bütün fonksiyonların kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir yarıgrup teşkil eder ve bu yarıgrup tam dönüşümler yarıgrubu olarak isimlendirilip $T_n$ ile gösterilir. Yine $X_n$ kümesi üzerinde tüm permütasyonlar (birebir ve örten dönüşümler) $S_n$ ile gösterilen simetrik grubu oluştururken, $Sing_n = T_n - S_n$ singüler dönüşümler yarıgrubudur. $Sing_n \leq T_n$ olduğu açıktır.

Cayley Teoreminden sonra popülaritesi artan dönüşüm yarıgrupları cebirin başlı başına bir alt çalışma alanı olmuştur. Bu bağlamda dönüşümler yarıgrubu, bunun farklı alt yarıgrupları ve özellikleri, diğer cebirsel yapılarla karşılaştırma yapılarak günümüze kadar çalışılagelmiştir. Farklı cebirsel yapılarda olduğu gibi dönüşüm yarıgruplarını da sınıflandırma yöntemlerinden birisi doğuray kümesi ve rank kavramıdır. $S$, sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere genel olarak rank, $T$ doğuray kümesi olmak üzere, $rank(S) = min\{|T|: \langle T \rangle = S \; ve \; T \subseteq S\}$ ile tanımlanır.

Palindrom ise soldan sağa ve sağdan sola yazılışları aynı olan bir kelime, cümle, sayı ya da farklı karakterlerin bir sıralanması olarak tanımlanabilir. "*teğet*", "*zaman yorar akıl kahreder haklı karar oynamaz*", "06102008180020160" örnekleri sıralanabilir.

**Tanım 1.1.** $X_n$ üzerinde, $i + j = n + 1$ için $f(i) = f(j)$ şartını sağlayan dönüşümlere palindromik dönüşüm denir. Yani, klasik gösterimle, $f \in Sing_n$ olmak üzere;

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n-1 & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(2) & f(1) \end{pmatrix}$$

şeklindeki dönüşümler palindromiktir. $P_n$ bütün palindromik dönüşümlerin kümesi, $k = \left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right] + 1$ olmak üzere $n^k$ elemanlı olup $T_n$ nin bir alt yarıgrubudur ($P_n \leq T_n$).

Yarıgruplar ve dönüşüm yarıgrupları ile ilgili açıklanmayan kavramlar için Howie (1995) ile Ganyushkin and Mazorchuk (2009) a bakınız.

## 2. Materyal ve Metot

Özellikle dönüşüm yarıgruplarında çığır açıcı çalışmalara imza atan İngiliz matematikçi John Machintosh Howie, rank tanımındaki doğurma özelliğine bağımsızlık tanımını da ekleyerek yarıgruplar için aşağıda gösterilen beş farklı rank geliştirmiştir. (Howie and Riberio 1999, 2000).

**Tanım 2.1.** $S$ sonlu bir yarıgrup olsun. $B \subseteq S$ olmak üzere $\forall x \in B \subseteq S$ için $x \notin \langle B - \{x\} \rangle$ ise $B$ kümesine $S$ nin bağımsız bir alt kümesi denir.

**Tanım 2.2.** $S$ bir yarıgrup olmak üzere;
$r_1(S) = max\{|A|: \forall A \subseteq S, A \; bağımsız\}$

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Osman Kelekci e-posta/e-mail: okelekci@ohu.edu.tr

$r_2(S) = min\{|A|: \exists A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$

$r_3(S) = max\left\{ \begin{matrix} |A|: \exists A \subseteq S, \langle A \rangle = S\ ve \\ A\ bağımsız \end{matrix} \right\}$

$r_4(S) = max\{|A|: \exists A \subseteq S, A\ bağımsız\ \}$

$r_5(S) = min\{|A|: \forall A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$

ile tanımlı olup sırasıyla küçük rank, alt rank, orta rank, üst rank ve geniş rank olarak isimlendirilmiştir. Ayrıca küçük rank ve geniş rank tanımlarında yer alan ∀ evrensel niceleyicisinden kaynaklı, bu iki rank formülüze edilmiştir. (Howie and Riberio, 2000). Bu bağlamda (Kelekci, 2011) de, $T_n$ tam dönüşümler yarıgrubunun üst rankı ve ayrıca (Kelekci, 2020) de ise $P_n$ palindromik dönüşümler yarıgrubunun $S_n$ e göre relatif rankı çalışılmıştır.

Bu beş rank arasındaki bağıntı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**Teorem 2.1.** $S$ bir yarıgrup olmak üzere $r_1(S) \le r_2(S) \le r_3(S) \le r_4(S) \le r_5(S)$ dir.

**İspat.** Bir $n \ge 1$ tamsayısı için $r_2(S) = n$ ise $|U| = n$ ve $\langle U \rangle = S$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır. $r_2(S)$ nin tanımından $U$ bağımsız olmak zorundadır. Aksi halde $u \in \langle U \setminus \{u\} \rangle$ olacak şekilde bir $u \in U$ mevcut olurdu ve bu durumda $\langle U \setminus \{u\} \rangle = S$ ve $r_2(S) \le n - 1$ olur ki bu da $r_2(S) = n$ olmasıyla çelişir. Bir $m \ge 1$ tamsayısı için $r_1(S) = m$, $r_2(S) = n$ ve kabul edelim ki $n < m$ olsun. O zaman $|U| = n$ ve $\langle U \rangle = S$ olacak şekilde bir $U \subseteq S$ vardır. Ayrıca, $U \subsetneq V$, $|V| = m$ ve $V$ bağımsız olacak şekilde en az bir $V \subseteq S$ vardır. Dolayısıyla $n < m$ olduğundan $V \setminus U \neq \emptyset$ olup en az bir $v \in V \setminus U$ mevcuttur. $V$ bağımsız olduğundan $v \notin \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olur. Ayrıca, $U \subsetneq V$ ve $v \in V \setminus U$ olduğundan $\langle U \rangle \subseteq \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olup $v \notin \langle U \rangle$ olur. Bu ise $\langle U \rangle = S$ olması ile çelişir. O halde $m \le n$ olup $r_1(S) \le r_2(S)$ olur. Eğer$|U| = r_2(S)$ ve $\langle U \rangle = S$ ise gösterildiği üzere $U \subseteq S$ bağımsız olur. Böylece $r_3(S)$ nin tanımından $r_2(S) = |U| \le r_3(S)$ olur. Benzer şekilde, $r_3(S) = |U|$, $U \subseteq S$ bağımsız ve $\langle U \rangle = S$ ise $r_4(S)$ nin tanımından $r_3(S) = |U| \le r_4(S)$ olur. Son olarak $r_4(S) \le r_5(S)$ olduğunu gösterelim. Bir $t \ge 1$ tamsayısı için $r_5(S) = t$ ve bir $k \ge 1$ tamsayısı için $r_4(S) = k$ olsun. Kabul edelim ki $k > t$ olsun. O zaman $S$ nin $k$ elemanlı bağımsız bir alt kümesi $V \subseteq S$ mevcut olup herhangi bir $v \in V$ için $|V \setminus \{v\}| \ge t$ ve $r_5(S)$ nin tanımından $\langle V \setminus \{v\} \rangle = S$ olur. Bu durumda $v \in \langle V \setminus \{v\} \rangle$ olur ki bu $V$ nin bağımsızlığı ile çelişir. O halde $k \le t$ yani $r_4(S) \le r_5(S)$ olur. Böylece $r_1(S) \le r_2(S) \le r_3(S) \le r_4(S) \le r_5(S)$ olduğu gösterilmiş olur. ■

**Tanım 2.3.** Dönüşüm yarıgrupları için Green denklik bağıntıları, $\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere;

(i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow im\alpha = im\beta$

(ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow ker\alpha = ker\beta$

(iii) $\alpha \mathcal{H} \beta \Leftrightarrow ker\alpha = ker\beta\ ve\ im\alpha = im\beta$

(iv) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |im\alpha| = |im\beta|$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $T_n$ nin $n$ tane $\mathcal{D}$ denklik sınıfı vardır ve bir $\mathcal{D}_k$ sınıfında;

a) $\binom{n}{k}$ tane farklı $\mathcal{L}$ sınıfı

b) $S(n,k)$ tane farklı $\mathcal{R}$ sınıfı

c) $S(n,k)\binom{n}{k}$ tane farklı $\mathcal{H}$ sınıfı

d) Bir $\mathcal{H}$ sınıfında $k!$ tane eleman

e) Bir $\mathcal{L}$ sınıfında $S(n,k)\ k!$ tane eleman

f) Bir $\mathcal{R}$ sınıfında $\binom{n}{k}$k! tane eleman

g) bir $\mathcal{L}$ sınıfında $n^{n-k}$ tane grup olan $\mathcal{H}$ sınıfı

h) Bir $\mathcal{D}_k$ sınıfında $\binom{n}{k}S(n,k)k!$ tane eleman

vardır. Burada $S(n,k)$ ikinci tip Stirling sayısıdır.

## 3. Bulgular

**Teorem 3.1.** Palindromik dönüşümler yarıgrubunun üst rankı, $r_4(P_n) \ge |B|$ dir. $B$ bir küme olup, palindromları ilk elde ettiğimiz en büyük $\mathcal{D}$ sınıfındaki ($\left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right] + 1$. nci sınıf), grup olan $\mathcal{H}$ sınıflarındaki idempotent elemanlardan ve grup olmayan $\mathcal{H}$ sınıflarındaki bütün elemanlardan oluşur.

**İspat.** Düzgün $\mathcal{D}$ sınıflarının kombinatorik özelliklerinden hareketle ve ayrıca palindromik dönüşümler, sahip oldukları çekirdek ($\ker(f) = \{(x,y) \in X_n \times X_n : xf = yf\}$) yapısından kaynaklı aynı $\mathcal{R}$ sınıfında bulunurlar.

İdempotentler, bulundukları $\mathcal{L}$ sınıfının sağ birimi, $\mathcal{R}$ sınıfının sol birimi ve $\mathcal{H}$ sınıfının ise birim elamanı rolü üstlenirler. Kalan elemanlar ise

$$im(\alpha\beta) \subseteq im(\beta) \quad (1)$$

olduğundan imajı azaltıp ve

$$ker(\alpha) \subseteq ker(\alpha\beta) \quad (2)$$

parçalanışı arttırarak sabit dönüşüme giderler. Sabit dönüşümler ise yine palindromiktir.

Şimdi $B$ kümesinin bağımsız olduğunu ispatlayalım. Tanım gereği $B$ kümesinin her bir elemanı, kalan elemanlar tarafından üretilen alt yarıgrubun elemanı olmayacak. Yani $\forall\alpha \in B$ için $\alpha \notin \langle B - \{\alpha\}\rangle$. Varsayalım ki herhangi bir $\beta \in B$ için $\beta \in \langle B - \{\beta\}\rangle$ olsun. O halde $\beta = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \cdots \cdot \delta_n$ olacak şekilde $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in B - \{\beta\}$ palindromları vardır. (1) ve (2) den $\ker(\delta_1) = \ker(\beta)$ ve $\mathrm{im}(\delta_n) = \mathrm{im}(\beta)$ olur. $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ve $\beta$ aynı $R$ sınıfında yer aldığından ($\left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right] + 1$. nci sınıf), hepsinin çekirdekleri eşit olup $\ker(\delta_n) = \ker(\beta)$ dır. O halde $\delta_n$ ve $\beta$ dönüşümleri, imajları ve çekirdekleri eşit olduğundan aynı $\mathcal{H}$ sınıfında bulunurlar.

Eğer $\beta$ palindromu bir idempotent ise, $\beta$ ile $\delta_n$ aynı $\mathcal{H}$ sınıfında bulunamaz. $B$ kümesinin tanımıyla çelişir. Bu sebeple $B - \{\beta\}$ kümesinde, $\ker(\delta_n) = \ker(\beta)$ olacak şekilde herhangi bir eleman yoktur. Yani $\beta \notin \langle B - \{\beta\}\rangle$ olup $B$ bağımsızdır.

Eğer $\beta$ palindromu bir idempotent değilse, idempotentler $\mathcal{R}$ sınıfı için sol birim görevi üstlendiğinden mümkün çarpmalar sonucunda grup olmayan $\mathcal{H}$ sınıfındaki elamanların dışında eleman doğurulmaz. Ayrıca grup olmayan $\mathcal{H}$ sınıfları kapalı olmadığından (aslında bağımsız alt küme olduğundan) mümkün çarpmalar imajı azaltır. Yani $|\mathrm{im}(\beta)| = |im(\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \cdots \cdot \delta_n)| \le \left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right] + 1 - 1$ olur. Bu ise $\beta$ nın $\left[\!\left[\frac{n-1}{2}\right]\!\right] + 1$. nci $\mathcal{D}$ sınıfında olmasıyla çelişir. O halde $\beta \notin \langle B - \{\beta\}\rangle$ dir. ■

$P_3$ ve $P_4$ için örnekle teorinin anlaşılmasını sağlayalım. Öncelikle, Green denklik bağıntılarından hareketle oluşturulan ve yumurta kutusu olarak adlandırılan düzgün $\mathcal{D}$ sınıfları (sütunlar $\mathcal{L}$ sınıfı, satırlar $\mathcal{R}$ sınıfı ve kesişimleri $\mathcal{H}$ sınıfı olmak üzere) $T_3$ için aşağıdaki çizelgedeki gibidir. Kalın olarak gösterilen dönüşümler palindromiktir. Ayrıca "*" ile indislenen dönüşümler imajına kısıtlandığında birim dönüşüm olduğundan idempotenttir ve bulundukları $\mathcal{H}$ sınıfları ise birer gruptur.

$D_3 = S_3$

| |
|---|
| $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ |

$D_2$

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}^*$ |
| $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$ |

$D_1$

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}^*$ | $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\end{pmatrix}^*$ | $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{3}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\end{pmatrix}^*$ |

$P_3$ için bağımsız $B$ kümesi,

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}\right\}$$

elemanlarından oluşur. O halde $r_4(P_3) \geq 4$ dir.

Benzer şekilde $P_4$ için bağımsız $B$ kümesi,

$$\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,2\,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,3\,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,2\,2\,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,3\,3\,4\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,4\,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,1\,1\,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,3\,3\,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,2\,3\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}$$

olup $r_4(P_4) \geq 8$ bulunur.

## 4. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada Palindromik dönüşümler yarıgrubunun üst rankı için bir alt sınır hesaplanmıştır. Aynı yarıgrubun farklı rank ve doğuray kümeleri açık problemdir.

**Etik Standartlar Bildirgesi**

Yazarlar tüm etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

**Çıkar Çatışması Beyanı**

Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

## 5. Kaynaklar


Ganyushkin, O. and Mazorchuk, V., 2009. Classical finite transformation semigroups, Springer-Verlag London Ltd., London, 318.

Howie, J.M., 1995 Fundamentals of semigroup theory, Oxford University Press, New York, 364.

Howie, J.M. and Riberio, M. I. M., 1999. Rank properties in finite semigroups. *Communications in Algebra*, **27**, 5333-5347. https://doi.org/10.1080/00927879908826758

Howie, J.M. and Riberio, M. I. M., 2000. Rank properties in finite semigroups II: the small rank and the large rank. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **24**, 231-237. https://doi.org/10.1007/s10012-000-0231-2

Kelekci, O., 2011. Upper rank of full transformation semigroups on a finite set. *International Journal of Algebra*, **5 (31)**, 1527-1532. https://doi.org/10.12988/ija

Kelekci, O., 2020. Tranformations with palindromic images. *Comptes rendus de l'Acad´emie bulgare des Sciences*, **73 (6)**, 751-757. https://doi.org/10.7546/CRABS.2020.06.01