

PAPER DETAILS

TITLE: (J,p_n) Toplanabilirliği İçin Tauber Teoremi

AUTHORS: Yusuf Ali TANDOĞAN

PAGES: 399-407

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/252420>

(J, p_n) TOPLANABİLİRLİĞİ İÇİN TAUBER TEOREMİ

Yusuf Ali TANDOĞAN

E.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, KAYSERİ

ÖZET:

$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ serisi $(0,1)$ aralığında yakınsak ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi veya (s_n) dizisi s ye (J, p_n) toplanabilirdir denir.

Burada

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 kabul edilerek, (J, p_n) toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi ifade ve ispat edildi.

THE TAUBER THEOREM FOR (J, p_n) SUMMABILITY

SUMMARY:

Let $\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ series is convergent in the open interval $(0,1)$ and if

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s,$$

we say that the series $\sum a_n$ or the sequence (s_n) is summable (J, p_n) to s .

Where that the radius of convergence of power series

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

İs 1. In this work we proved the Tauber Theorem for (J, p_n) summability.

1- GİRİŞ

Tauber Teoremleri'nin tarihçesi hakkında bilgi ve burada vereceğimiz (J, p_n) toplanabilirliği için Tauber Teoremi ile ilgili tanımlar daha önce [4] da verilmişti. Bu çalışmada Littlewood'un [3], birinci Tauber Teoremi'indeki $n a_n = 0(1)$ şartı yerine koyduğu $n a_n = 0(1)$ şartı ile ilgili (J, p_n) toplanabilirliği için Tauber Teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

2- TEOREM

$$(p_n), P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, (n \rightarrow \infty), (P_{-1} = 0, p_{-1} = 0) \text{ olacak şekilde}$$

pozitif sabitlerin bir dizisi olsun. $p_n > 0$ olmak üzere

$$n p_n = 0(1) \quad (2.1)$$

olduğunu kabul edelim Yine ayrıca $\sum a_n$ serisinin s ye (J, p_n) toplanabilir olduğunu ve

$$a_n P_n = o(p_n) \quad (2.2)$$

şartının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi s ye yakınsar [2].

İSPAT:

$n p_n = 0(1)$ ve $P_n a_n = o(p_n)$ den dolayı öyle bir m seçebiliriz ki, $n > m$ için

$$n \cdot p_n \leq M \quad (2.3)$$

ile birlikte, ϵ istediğimiz kadar küçük pozitif bir sayı olmak üzere

$$|a_n| \leq \epsilon \frac{p_n}{p_n} \quad (2.4)$$

dir.

İlk önce (2.1) şartının

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} = O(1), \quad m \rightarrow \infty \text{ için} \quad (2.5)$$

ifadesini gerektirdiğini ispat edelim, daha önce bunu böyle almıştık [4].

$$n \cdot p_n \leq M$$

den dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot n \cdot p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \\ &\leq M \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \end{aligned}$$

yazalım. $n > m$ den $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ olduğunu gözönüne alırsak

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \leq \frac{M}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n = \frac{M}{m} \cdot m = M$$

elde ederiz. Buradan da $0 < x < 1$, $0 < p_n(1-x^n) < (1-x) n \cdot p_n$ için

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^m p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^m p_n \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^m p_n \right| + \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot n p_n \right| + M \\
&\leq M + \frac{1}{m} \left| \sum_{n=0}^m n p_n \right| \\
&= M + \frac{p_1 + 2p_2 + \dots + m p_m}{m}
\end{aligned}$$

dir. $n \cdot p_n = o(1)$ kabulümüzden dolayı

$$\sum_{n=1}^m n \cdot p_n = o(m)$$

olduğunu göz önüne alalım [1]. Bu nedenle, m yi yeterince büyük seçmek şartıyla

$$\left| \sum_{n=0}^m p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \right| \leq M$$

elde ederiz.

Bu hesaplamalardan kolayca elde ederiz ki, limit tanımına göre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m p_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

buradan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^m p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} = 1$$

ve aynı zamanda

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} = o(1), \quad m \rightarrow \infty$$

elde ederiz.

Şimdi de $\sum a_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi (s_n) 'in s ye yakınsadığını gösterelim. $0 < x < 1$ için

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_m p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{m-1} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} - \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{r=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$= I + J$$

diyelim. Eğer $x = 1 - \frac{1}{m}$ seçilirse (2.2) ve (2.5)'den

$$\begin{aligned}
 |I| &\leq \frac{\sum_{n=0}^{m-1} |s_m - s_n| p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \\
 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \{ |s_m - s_0| p_0 + |s_m - s_1| p_1 + \dots + |s_m - s_{m-1}| p_{m-1} \} \\
 &\leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \left\{ p_1 \frac{|a_1| p_0}{p_1} + p_2 \frac{|a_2| (p_0 + p_1)}{p_2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + p_m \frac{|a_m| (p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1})}{p_m} \right\} \\
 &= \frac{p_m}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \cdot \frac{1}{p_m} \left\{ p_1 \frac{|a_1| p_0}{p_1} + p_2 \frac{|a_2| p_1}{p_2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + p_m \frac{|a_m| p_{m-1}}{p_m} \right\} \\
 &= \frac{p_m}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \cdot \frac{1}{p_m} \{ o(1) + o(1) + \dots + o(1) \}
 \end{aligned}$$

$$I = o(1) \frac{\sum_{n=0}^m p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \cdot \frac{1}{p_m} = o(1) \cdot o(1) = o(1)$$

böylece

$$I = o(1), \quad m \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

elde edilir.

Şimdi biz J yi hesaplayalım. (2.4)'den

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &\leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| \\ &\leq \varepsilon \left\{ \frac{p_{m+1}}{p_{m+1}} + \frac{p_{m+2}}{p_{m+2}} + \dots + \frac{p_n}{p_n} \right\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{p_m} \{ p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_n \} \\ &= \frac{\varepsilon}{p_m} \left\{ \frac{(m+1) p_{m+1}}{m+1} + \frac{(m+2) p_{m+2}}{m+2} + \dots + \frac{n p_n}{n} \right\} \end{aligned}$$

(2.3)'den de

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &\leq \frac{\varepsilon M}{p_m} \cdot \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \dots + \frac{1}{n} \right\} \\ &\leq \frac{\varepsilon M}{p_m} \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \right\} \end{aligned}$$

ve böylece

$$|s_m - s_n| \leq \frac{\epsilon M}{p_m} \cdot \frac{n}{m} \quad (2.7)$$

bulunur. Buradan da $x = 1 - \frac{1}{m}$ olduğunda

$$|J| \leq \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} |s_m - s_n| p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

ifadesi (2.7)'den

$$|J| \leq \frac{\epsilon \frac{M}{p_m} \cdot \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} n \cdot p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}$$

(2.3)'den de

$$|J| \leq \frac{p_m \frac{\epsilon M^2}{p_m^2} \cdot \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}$$

olur. Yeterince büyük m için (2.5)'den

$$|J| < o(1) \cdot \epsilon \frac{M^2}{m \cdot p_m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

dir, buradan $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = m$ alırsak,

$$|J| \leq \epsilon \frac{M^2}{m \cdot p_m^2} \cdot m$$

ve yine $\frac{m^2}{p_m^2} = o(1)$ den

$$|J| \leq \epsilon \frac{M^2}{m^2} \leq \epsilon \quad (2.8)$$

elde edilir.

m 'yi sonsuza götürürsek (2.6) ve (2.8)'den

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} \leq o(1) + \epsilon$$

olur, buradan da

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{P_s(x)}{p(x)} = s$$

olur ki, bu da teoremin ispatıdır.

KAYNAKLAR

- 1- E.W. Hobson, "The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series", vol. 2,7, Cambridge (1926)
- 2- K. Ishiguro, "Two Tauberian Theorem for (J, p_n) summability", Proc. Japan Acad. 41,40-45, (1965)
- 3- J.E. Littlewood, "The Converse of Abel's Theorem on power series", P.London, Math. Soc. (2), 434-448, (1911)
- 4- Y.Ali Tandoğan, " (J, p_n) Toplanabilirliği için bir Tauber Teoremi" E.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, Kayseri, cilt 1, sayı 2, 321-329, (1985)