

PAPER DETAILS

TITLE: TEK DEĞİSKENLİ KUATERNİYON DEĞERLİ FONKSİYONLAR VE EGİLİM ÇİZGİLERİ

AUTHORS: Müge KARADAG, Ali İhsan SIVRIDAG

PAGES: 23-36

ORIGINAL PDF URL: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/252496>

TEK DEĞİŞKENLİ KUATERNİYON DEĞERLİ FONKSİYONLAR VE EĞİLİM ÇİZGİLERİ

Müge KARADAĞ - Ali İhsan SİVRİDAĞ

İnönü Üniv. Fen-Ed. Fak Matematik Bölümü MALATYA

ÖZET

3-boyutlu reel Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ deki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri uzay-kuaterniyonları yardımıyla K.Bharathi ve M.Nagaraj tarafından yeniden türetilmiştir. Bulunan bu formüller yardımıyla $\mathbb{R}^4$ deki 1-değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonların (kuaterniyonik eğrilerin) Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir [1]. Bu çalışmada ise yukarıda sözü edilen hesaplamalar temel alınarak $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ deki kuaterniyonik eğriler için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramları verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için bir de karakterizasyon verilmiştir.

QUATERNION VALUED FUNCTIONS OF A SINGLE REAL VARIABLE AND INCLINED CURVES

SUMMARY

The Serret-Frenet formulae for a quaternion valued function of a single real variable (quaternionic curves) in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ is rederived by K.Bharathi and M.Nagaraj. In this paper we define quaternionic inclined

curves and harmonic curvatures for the quaternionic curves. And we give a characterisation for a quaternionic curve to be a quaternionic inclined curve.

1.GİRİŞ

Önce $\mathbb{R}^3$, uzay-kuaterniyonlarının cümlesi ile özdeşlenerek $\mathbb{R}^3$ deki eğriler kuaterniyonik eğriler olarak gözönüne alınmış ve kuaterniyonlar yardımıyla Frenet formülleri yeniden elde edilmiştir. Daha sonra bu $\mathbb{R}^4$ e genelleştirilmiştir.

TANIM 1. Bir reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır [2]. Burada $+1$ bir reel birim olup diğer üç birim ise,

$$\begin{aligned} 1) \quad & \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_4, (\vec{e}_4 = +1) \\ 2) \quad & \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i, \quad (ijk) \quad (123) \text{ ün çift} \end{aligned}$$

permütasyonudur.

özelliklerini sağlar. Böylece bir reel kuaterniyon ,

$$q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d$$

şeklindedir. Burada

$$S_q = d, \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3, q = S_q + \vec{V}_q$$

olmak üzere ; S_q , q'nun skalar kısmı $\vec{V}_q$ ise vektörel kısmıdır [1]. Bundan sonra reel kuaterniyonların cümlesi Q ile gösterilecektir. İki kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı ; $\forall p, q \in Q$ için

$$(1) \dots \quad p \times q = S_p S_q + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

şeklindedir. Burada $\langle , \rangle$ ve $\wedge$ sırasıyla, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki skalar ve vektörel çarpımı göstermektedir.

TANIM 2. Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun eşleniği diye

$$(2) \dots \quad \alpha q = S_q - \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan αq kuaterniyonuna denir [1].

TANIM 3. $p, q \in Q$ reel kuaterniyonları için ,

$$(3) \dots \quad \begin{aligned} h: Q \times Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\rightarrow h(p, q) \\ h(p, q) &= \frac{1}{2}(px\alpha q + qx\alpha p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan h formu kuaterniyon iç çarpımı adını alır [1]. Reel değerli , simetrik , bilineer h formu iç çarpım aksiyomlarını sağlar [1]. Burada x kuaterniyon çarpımını göstermektedir.

TANIM 4. Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun normu

$$(4) \dots \quad \|q\|^2 = h(q, q) = qx\alpha q$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir [1].

TANIM 5. Eğer $q \in Q$ kuaterniyonu için

$$(5) \dots \quad q + \alpha q = 0$$

oluyorsa q 'ya bir uzay-kuaterniyonu denir [1]. Uzay-kuaterniyonlarının cümlesi 3-boyutlu vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ e izomorftur. Eğer $q \in Q$ kuaterniyonu için

$$q - \alpha q = 0$$

olursa q bir temporal kuaterniyon adını alır [1]. Genel olarak , bir $q \in Q$ kuaterniyonu

$$(6) \dots \quad q = \frac{1}{2}(q + \alpha q) + \frac{1}{2}(q - \alpha q)$$

şeklinde yazılabilir [1].

TANIM 6. Eğer ; $p, q \in Q$ kuaterniyonları için $h(p, q) = 0$ oluyorsa p ile q 'ya h -ortogonaldir denir [1].

Bu çalışmamız süresince reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlardan “kuaterniyonik eğri” olarak söz edeceğiz. Yani kuaterniyonik eğri ile , $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere , bir

$$(7) \dots \quad \beta: I \rightarrow Q$$

$$\beta(s) = \gamma_1(s)\vec{e}_1 + \gamma_2(s)\vec{e}_2 + \gamma_3(s)\vec{e}_3 + \gamma_4(s) \quad , \quad \gamma_i(s) \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 4$$

reel tek değişkenli , kuaterniyon değerli β dönüşümü altında I 'nın $\beta(I)$ resmi kastedilecektir [3].

2. KUATERNİYONİK EĞRİLERİN SERRET-FRENET FORMÜLLERİ

3-boyutlu reel Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$, uzay-kuaterniyonlarının cümlesi ile özdeşlenerek $\mathbb{R}^3$ deki bir eğri bir uzay-kuaterniyonik eğri olarak gözönüne alınsın. Şimdi bir uzay-kuaterniyonik eğri için Frenet formüllerini vereceğiz.

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, birim hızlı bir (C) uzay-kuaterniyon eğrisi

$$(8) \dots \gamma(s) = \gamma_1(s)\vec{e}_1 + \gamma_2(s)\vec{e}_2 + \gamma_3(s)\vec{e}_3$$

parametrik denklemleriyle verilsin. $\dot{\gamma}(s) = t$ diyelim. Eğrinin birim hızlı olma şartı;

$$(9) \dots t\alpha t + t\alpha t = 0$$

olmasını gerektirir. Bu son eşitlik ise t nın t 'ye ortogonal olduğunu gösterir.

$$(10) \dots t = k n_1 \quad ; \quad k = \|t\|$$

diyelim. $t n_1 = n_2$ dersek, bu durumda t, n_1 ve n_2 ikişer ikişer ortogonal olur. Ayrıca

$$(11) \dots \dot{n}_1 = -k t + r n_2 \quad \text{ve} \quad \dot{n}_2 = -r n_1$$

olur [1]. (10) ve (11) eşitlikleri (C) eğrisinin Serret-Frenet formülleridir.

$\mathbb{R}^4$ ün her bir elemanını bir tek reel kuaterniyon ile eşleyerek $\mathbb{R}^4$ deki bir eğriyi bir kuaterniyonik eğri olarak gözönüne alacağız. Böylece, birim hızlı bir (C') kuaterniyonik eğrisi

$$\beta(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i(s) \vec{e}_i, \quad s \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad \vec{e}_i = +1$$

parametrik denklemleriyle verilebilir. $\dot{\beta}(s) = T$ olsun.

$$(12) \dots \dot{T} = K N_1 \quad \text{ve} \quad K = \|\dot{T}\|$$

diyelim. $\|T\| = 1$ eşitliğinden türev alarak,

$$(13) \dots N_1 \alpha T + T \alpha N_1 = 0$$

elde edilir ki bu da $h(T, N_1) = 0$ olmasını gerektirir. Yani T, N_1 'e h-ortogonaldır.

$$(14) \dots \quad N_1 = t \times T, \quad N_2 = n_1 \times T, \quad N_3 = n_2 \times T$$

şeklinde tanımlansın. Burada t, n_1, n_2 vektörleri (8) ile verilen uzay-kuaterniyon eğrisinin Frenet vektörleridir. Bu durumda; T, N_1, N_2, N_3 ikişer ikişer h-ortogonaldirler [1]. Ayrıca,

$$(15) \dots \quad \dot{N}_1 = -K T + k N_2$$

$$(16) \dots \quad \dot{N}_2 = -k N_1 + (r - K) N_3$$

$$(17) \dots \quad \dot{N}_3 = -(r - K) N_2$$

türev formülleri geçerlidir. Dolayısı ile (C') eğrisinin Serret-Frenet formüllerinin matrisel ifadesi,

$$(18) \dots$$

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \\ \dot{N}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-K) \\ 0 & 0 & -(r-K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir [1].

3. KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE HARMONİK EĞRİLİKLER

Bu kısımda $\mathbb{R}^3$ ile uzay-kuaterniyonlarının cümlesi özdeşlenerek $\mathbb{R}^3$ deki bir eğriye karşılık gelen uzay-kuaterniyon eğrisinin bir eğilim çizgisi olması için bir karakterizasyon verilecektir.

TANIM 7. $\mathbb{R}^3$ deki birim hızlı bir (C) eğrisi ile eşlenen $\gamma(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ uzay-kuaterniyon eğrisini gözönüne alalım. Sabit bir uzay-kuaterniyonu u olmak üzere, $\forall s \in I$ için ,

$$(19) \dots \quad h(\dot{\gamma}(s), u) = \cos \varphi = st. \quad , \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

ise (C) eğrisine bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi denir.

Diğer yandan , $\forall s \in I$ için ,

$$\begin{aligned} h(\dot{\gamma}(s), u) &= h(t(s), u) \quad , \quad t(s) = \dot{\gamma}(s) \\ &= \langle t(s), u \rangle \end{aligned}$$

$$(20) \dots \quad h(t(s), u) = \cos \varphi$$

olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir:

SONUÇ 1. $\mathbb{R}^3$ deki bir eğri reel anlamda eğilim çizgisi ise bu eğri ile eşlenen uzay-kuaterniyonik eğri de eğilim çizgisidir. Bunun karşıtı da doğrudur [3].

Bir uzay-kuaterniyon eğrisinin harmonik eğriliği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

TANIM 8. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler kuaterniyon eğrisi s-yay parametresi ile verilsin. $\mathbb{R}^3$ ün birim ve sabit bir vektörü u ve $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı olsun. Bu takdirde $\dot{\gamma}(s)$ ve u arasındaki açı $\varphi = \varphi(s)$ olmak üzere,

$$(21) \dots \quad \begin{aligned} H : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ h(n_2(s), u) &= H(s) \cos \varphi \end{aligned}$$

içiminde tanımlanan H fonksiyonuna γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında u 'ya göre harmonik eğriliği denir. Şimdi, uzay-kuaterniyonik eğilim çizgilerinin harmonik eğriliğini eğrilikler cinsinden ifade eden şu teoremi verebiliriz:

TEOREM 1. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ s-yay parametresi ile verilen bir uzay-kuaterniyon eğilim çizgisi olsun. γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k(s)$, $r(s)$ ve harmonik eğriliği $H(s)$ olmak üzere,

$$(22) \dots \quad H(s) = \frac{k(s)}{r(s)}$$

dir.

İSPAT : $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay-kuaterniyon eğilim çizgisinin teğet vektörünün u vektörü ile yapmış olduğu açı φ olsun. $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ olmak üzere,

$$h(t(s), u) = \cos \varphi = st.$$

yazabiliriz. Buradan s 'ye göre türev alırsa,

$$h(i(s), u) + h(t(s), \dot{u}) = 0$$

veya

$$h(i(s), u) = 0$$

elde edilir. Burada (10) ifadesini yerine koyarak,

$$h(k(s)n_1(s), u) = 0$$

$$k(s)h(n_1(s), u) = 0$$

bulunur. $k(s) \neq 0$ olacağından

$$h(n_1(s), u) = 0$$

dır. Bu son ifadeden türev alınırsa,

$$h(\dot{n}_1(s), u) + h(n_1(s), \dot{u}) = 0$$

veya

$$h(\dot{n}_1(s), u) = 0$$

elde edilir. (11) denkleminin burada yerine konulmasıyla,

$$\begin{aligned} h(-k(s)t(s) + r(s)n_2(s), u) &= 0 \\ -k(s)h(t(s), u) + r(s)h(n_2(s), u) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte (20) ve (21) ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$-k(s)\cos\varphi + r(s)H(s)\cos\varphi = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$H(s) = \frac{k(s)}{r(s)}$$

elde edilir.

Bir kuaterniyonik eğri için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramları öncelikle $\mathbb{R}^4$ ile $\mathbb{Q}$ kuaterniyonlar kümesi özdeşlenerek verilecektir.

TANIM 9. $\beta : I \rightarrow Q$ regüler kuaterniyon eğrisi s-yay parametresi ile verilsin. Birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu u olmak üzere, $\forall s \in I$ için ,

$$(23) \dots \quad h(\dot{\beta}(s), u) = \cos \varphi = st.$$

ise β eğrisine Q da bir kuaterniyonik eğilim çizgisidir denir.

TEOREM 2. $\gamma : I \rightarrow IR^3$ e bir uzay-kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun.

$\gamma(s) = \gamma_1(s)\bar{e}_1 + \gamma_2(s)\bar{e}_2 + \gamma_3(s)\bar{e}_3$ olmak üzere γ 'dan türetilen her $\beta(s) = \gamma_1(s)\bar{e}_1 + \gamma_2(s)\bar{e}_2 + \gamma_3(s)\bar{e}_3 + \gamma_4(s)$ kuaterniyonik eğrisi de bir kuaterniyonik eğilim çizgisidir [3].

İSPAT : $\beta : I \rightarrow Q$ s-yay parametresi ile verilen bir eğri olsun. u, γ eğilim çizgisi ile belli sabit doğrultuyu gösteren birim uzay-kuaterniyonu ve β 'nın $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h(\dot{\beta}(s), u) &= h(T(s), u) \quad , \quad T(s) = S_{T(s)} + \vec{V}_{T(s)} \\ &= \frac{1}{2} [T(s) \alpha u + u \alpha T(s)] \\ &= \frac{1}{2} [(S_{T(s)} + \vec{V}_{T(s)}) \alpha u + u \alpha (S_{T(s)} + \vec{V}_{T(s)})] \end{aligned}$$

bulunur. Burada u bir uzay-kuaterniyonu olduğundan $S_u = 0$ ve $\alpha u = -u$ dur. Dolayısıyla (1) gözönüne alınarak bu son eşitlikten

$$h(T(s), u) = \frac{1}{2}[-S_{T(s)} \cdot u + \langle \vec{V}_{T(s)}, u \rangle - \vec{V}_{T(s)} \wedge u + S_{T(s)} \cdot u + \langle \vec{V}_{T(s)}, u \rangle - u \wedge \vec{V}_{T(s)}]$$

$$(24) \dots h(T(s), u) = \frac{1}{2}[2\langle \vec{V}_{T(s)}, u \rangle] = \langle \vec{V}_{T(s)}, u \rangle = \cos \varphi = \text{st.}$$

elde edilir. Bu ise β eğrisinin kuaterniyonik eğilim çizgisi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

TANIM 10. β regüler kuaterniyon eğrisi s -yay parametresi ile verilsin. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ de β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı olsun. Bu taktirde $T(s)$ ve u arasındaki açı φ olmak üzere

$$(25) \dots H_i : I \rightarrow IR$$

$$h(N_{i+1}(s), u) = H_i \cos \varphi(s)$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna β kuaterniyon eğrisinin u ' ya göre $\beta(s)$ noktasındaki i -yinci harmonik eğriliği denir. $H_0 = 0$ olarak tanımlanır.

Kuaterniyonik eğrilerin eğrilikleri ile harmonik eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

TEOREM 3. $\beta : I \rightarrow Q$ s -yay parametresi ile verilen bir kuaterniyonik eğilim çizgisi olsun. $\beta(s)$ noktasındaki i -yinci eğrilik $k_i(s)$, i -yinci eğrilik yarıçapı $\sigma_i(s) = \frac{1}{k_i}(s)$, $1 \leq i \leq 3$ ve harmonik eğrilikleri $H_i(s)$, $i = 1, 2$ olsun. Bu taktirde;

$$(26) \dots H_1(s) = \frac{1.eğrilik}{2.eğrilik}$$

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s) \sigma_3(s)$$

dir.

İSPAT : $\beta : I \rightarrow Q$ regüler kuaterniyon eğrisi verilsin. u birim ve sabit bir uzay-kuaterniyonu ve $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$ olmak üzere,

$$h(T(s), u) = \cos \varphi = st.$$

yazabiliriz. Bu ifadenin s 'ye göre türevi alınırsa,

$$h(\dot{T}(s), u) + h(T(s), \dot{u}) = 0$$

veya

$$h(K(s)N_1(s), u) = 0$$

bulunur. Burada $K(s) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$h(N_1(s), u) = 0$$

olur. Yeniden s 'ye göre türev alınarak,

$$\begin{aligned} h(\dot{N}_1(s), u) + h(N_1(s), \dot{u}) &= 0 \\ h(\dot{N}_1(s), u) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (15) ün kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} h(-K(s)T(s) + k(s)N_2(s), u) &= 0 \\ -K(s)h(T(s), u) + k(s)h(N_2(s), u) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca bu son eşitlikte (25) denkleminde $i = 1$ için elde edilen;

$$(27) \dots \quad h(N_2(s), u) = H_1(s) \cos \varphi$$

ile (24) ün birlikte göz önüne alınmasıyla,

$$-K(s) \cos \varphi + k(s) H_1(s) \cos \varphi = 0$$

ya da

$$H_1(s) = \frac{K(s)}{k(s)} = \frac{1. \text{eğrilik}}{2. \text{eğrilik}}$$

elde edilir. Bu sonuç diferensiyel geometriden reel eğriler için bilinen harmonik eğrilik kavramıyla tam bir benzerlik arz etmektedir [4].

Ayrıca, (27) dan s 'ye göre türev alınarak,

$$h(\dot{N}_2(s), u) + h(N_2(s), \dot{u}) = \dot{H}_1(s) \cos \varphi$$

veya

$$(28) \dots \quad h(\dot{N}_2(s), u) = \dot{H}_1(s) \cos \varphi$$

bulunur. Burada (16) in gözönüne alınmasıyla,

$$\begin{aligned} h(-k(s)N_1(s) + (r - K(s))N_3(s), u) &= \dot{H}_1(s) \cos \varphi \\ -k(s)h(N_1(s), u) + (r - K(s))h(N_3(s), u) &= \dot{H}_1(s) \cos \varphi \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada her iki tarafın $\cos \varphi$ ile bölünüp tanım (10) un da kullanılmasıyla,

$$-k(s)H_0(s) + (r - K(s))H_2(s) = \dot{H}_1(s)$$

elde edilir. Böylece,

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s) \frac{1}{(r - K)(s)}$$

ya da

$$H_2(s) = \dot{H}_1(s) \sigma_3(s)$$

olur.

KAYNAKLAR

- [1] Bharathi, K. and Nagaraj, M. Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae. Indian J. Pure. 18 (6) : 507-511, June 1987.
- [2] Hacısalihoğlu, H.H. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak. Yayınları 1983
- [3] Karadağ, M. Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet vektörleri ve Eğilim Çizgileri İnönü Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü 1992
- [4] Hacısalihoğlu, H.H. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen-Edb. Fak. Yayınları 1983