Ahi Evran Üniversitesi
Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

http://kefad.ahievran.edu.tr

Examining Proof-Writing Skills of Pre-Service Mathematics Teachers' in Geometric Proofs: van Hiele Model

Ceylan Şen
Gürsel Güler

Article Information

DOI: 10.29299/kefad.997311

Received: 18.09.2021
Revised: 04.11.2021
Accepted: 17.03.2022

Keywords:
Van Hiele Model
Proof-Writing
Teaching Experiment
Pre-Service Mathematics Teacher

Abstract

The aim of this study is to examine the development of pre-service mathematics teachers' proof-writing skills in teaching activities based on the van Hiele model. The study was carried out with 10 pre-service mathematics teachers studying in the first year of the primary school mathematics teaching programme. In the study, teaching experiment design, one of the qualitative research methods, was adopted since it was aimed to reveal the effectiveness of the van Hiele model on pre-service mathematics teachers' proof-writing skills. For this purpose, qualitative data collection tools (personal interviews, pre-service teachers' worksheets, and researcher field notes) were used to collect data. The development of pre-service mathematics teachers' proof-writing skills was discussed within the scope of teaching stages and levels in the van Hiele model. As a result of the study, it was seen that the pre-service mathematics teachers' proof-writing skills were supported by a developmental process in the van Hiele model, and they were able to reach the van Hiele-4 level in proof-writing. It was concluded that knowledge and inquiry, guidance/directed orientation, explicitation/interpretation, free guidance and integration, which are the components of the teaching environment in the van Hiele model, are effective in supporting the pre-service mathematics teachers developmentally. In line with these results, suggestions were made to support the development of van Hiele geometric thinking in geometry learning of pre-service mathematics teachers.

Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometrik İspatlarda İspat Yazma Becerilerinin İncelenmesi: van Hiele Modeli

Makale Bilgileri

DOI: 10.29299/kefad.997311

Yükleme: 18.09.2021
Düzeltme: 04.11.2021
Kabul: 17.03.2022

Anahtar Kelimeler:
Van Hiele Modeli
İspat Yazma
Öğretim Deneyi

Öz

Bu çalışmanın amacı, van Hiele modeline dayalı öğretim etkinliklerinde matematik öğretmeni adaylarının ispat yazma becerilerindeki gelişimlerinin incelenmesidir. Çalışma, ilköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıfında öğrenim görmekte olan on öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmada, van Hiele modelinin öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerindeki etkiliğinin ortaya konulması amaçlandığından nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi deseni benimsenmiştir. Bu amaçla nitel veri toplama araçları (bireysel görüşmeler, öğretmen adaylarının çalışma kağıtları ve araştırmacı alan notları) veri toplanması için kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişimleri van Hiele modelinde yer alan öğretim aşamaları ve düzeyleri kapsamında ele alınmıştır. Çalışma sonucunda, VH modelinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişimsel bir süreç ile desteklendiği ve ispat yazmada van Hiele-4 düzeyine erişebildikleri görülmüştür. Matematik öğretmen adaylarının gelişimsel olarak desteklenmesinde ise van Hiele modelinde yer alan bilgi ve sorgulama, rehberlik etme/destekleyici yönlendirme, açıklama/yorumlama, serbest yönlendirme ve entegrasyon öğretim ortamı unsurları etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçlar doğrultusunda

Sorumlu Yazar: Ceylan Şen, Dr. Öğr. Üyesi, Yozgat Bozok Üniversitesi, Türkiye, ceylan.sen@yobu.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-6384-7941.

Gürsel Güler, Doç. Dr., Yozgat Bozok Üniversitesi, Türkiye, gursel.guler@yobu.edu.tr, ORCID ID: 0000-0003-1429-1585.

Atıf için: Şen, C., & Güler, G. (2022). Matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispatlarda ispat yazma becerilerinin incelenmesi: van Hiele modeli. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(Özel Sayı), 128-176.

Matematik Öğretmeni Adayı	matematik öğretmen adaylarının geometri öğrenimlerinde van Hiele geometrik düşünme gelişimlerini destekleyici önerilerde bulunulmuştur.

Giriş

İspat, matematiksel bilginin oluşumu, gelişimi ve iletilmesi için gerekli olmakla birlikte matematiği anlamanın temelini oluşturmaktadır (Stylianides, 2007). Wu (1996) matematiğin ne olduğunu bilmek isteyen herkesin bir ispatı nasıl yazacağını anlaması ve öğrenmesi gerektiğini belirtmektedir. Benzer şekilde Hanna (2000) ispatı, matematikteki en önemli araç olarak görmüş ve ispatsız bir matematiğin matematik olmadığını savunmuştur. Bu sonuçlar doğrultusunda Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) akıl yürütme ve ispat yapmayı okul matematiğinde temel beceriler arasına dâhil etmiştir. Bu nedenle ispat, her düzeydeki okul matematiği ve sınıfının doğal ve devam eden bir parçası haline gelmiştir (Knuth, 2002). Bu doğrultuda üniversite matematik müfredatında da ispat gerekli bir bileşen olarak vurgulanmıştır.

İleri düzey matematik ve geometri öğretiminin temel amacı öğrencilere ispat becerisi kazandırmaktır (Weber, 2001). Matematik ve geometriyi bilmenin özünde ispat olmasına rağmen matematik öğretmeni adaylarının ispatı anlama ve ispat yazmada zorluk yaşadıkları (Almeida, 2000; Jones, 2000; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Moore, 1994; Stylianides, Stylianides, ve Philippou, 2007) ve ispat becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı (Jones, 2000; Stylianides, Stylianides, ve Philippou, 2004) görülmektedir. Senk (1985) çalışmasında geometrik ispatlamada öğrencilerin tümdengelimli ispatların gerekliliğini fark edemediklerini ve ispat türlerini yazmada yetersiz olduklarını belirtmiştir. Benzer şekilde Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos, ve Choustoulakis (2007) araştırmalarında öğrencilerin geometride formel ispat yazmada zorluk yaşadıklarını ortaya koymuşlardır. Bununla birlikte geometri müfredatının önemli bir hedefi olan ispat yapmanın öğrenciler tarafından önemsiz görüldüğü ve zorlanıldığı sonuçlarına ulaşılmıştır (Dimakos ve diğerleri, 2007). Bu çalışmada, geometri konularının öğretiminde gerçekleştirilecek olan van Hiele modeline dayalı öğretim deneyi ile matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispatlardaki ispat yazma becerilerindeki gelişimin incelenmesi hedeflenmektedir. Bu sayede öğretmen adaylarının geometrik ispat yazmalarında van Hiele modelinin etkililiği ortaya konularak alanyazına katkı sunulacaktır. Bu amaçla bu çalışmada aşağıdaki araştırma sorusuna cevap aranmıştır:

1. Matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yazma becerilerinde van Hiele Modeli'nin etkililiği nedir?

Kuramsal Çerçeve

Geometrik İspat

Geometri, şekil ve uzayı matematiksel bir bakış açısıyla incelemektedir. Geometri, matematiksel aksiyomlara dayanan ve ispatla gerekçelendirilen ifadelerden oluşan bilgi yapısıdır (Kotzé, 2007). İleri düzey matematik ve geometri öğretiminin temel amacı öğrencilere ispat becerisi kazandırmaktır (Weber, 2001). Geometri öğretimi ve özellikle geometrik ispat öğretiminin önemi birçok ülkenin matematik müfredatında vurgulanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018, NCTM, 2000; Shanghai Education Committee, 2004). Okul matematiğinde geometri, öğrencilerin tümdengelimli düşünce gelişimini desteklemektedir (Howse ve Howse, 2014). Bu destek geometrik ispat ile sağlanmakla birlikte geometrik ispat, öğrencilerin geometri kavramlarını görselleştirmelerine, anlamalarına ve sınıflandırmalarına olanak sağlamaktadır (Bell, 1976). Öğrencilerin geometri öğretimlerindeki gelişimleri daha ileri eğitime hazırlık olarak ilkokul ve ortaokuldan itibaren matematik öğretmenleri tarafından desteklenmelidir. Fuys (1985), geometri öğretiminin öğrencilere kazandırdığı iki ana hedefinin olduğunu belirmektedir: Tümdengelimsel akıl yürütme becerisinin gelişimi ve tümdengelimin matematikteki rolünü anlamaktır. Tümdengelimsel akıl yürütme ve ispat yapmayı öğrenmek matematik için önemlidir fakat ispatın yer aldığı geometri konularında öğrencilerin sadece %30'unun ispat yapabildiği görülmektedir (Clements ve Battista, 1992). McCrone ve Martin (2004) çalışmalarında, öğrencilerin geometrik ispatlarda düşük ispat şemalarında yer aldıklarını ortaya koymuşlardır. Benzer şekilde Sevgi ve Orman (2020) çalışmasında 8. sınıf öğrencilerinin orta düzeyde ispat becerilerine sahip oldukları sonucuna ulaşmışlardır. Bu doğrultuda, öğrencilerin geometrik ispat yapmada yetersiz kaldıkları görülmektedir. Geometri öğretimi yoluyla öğrencilerin düşünce gelişimlerini desteklemek için öncelikle matematik öğretmenlerinin ve adaylarının geometrik ispat yazma becerilerine sahip olmaları gerekmektedir.

Matematik ve geometriyi bilmenin özünde ispat olmasına rağmen matematik öğretmeni ve adaylarının ispatı anlama ve ispat yazmada zorluk yaşadıkları (Almeida, 2000; Jones, 2000; Knuth, 2002; Moore, 1994; Stylianides ve diğerleri, 2007) ve ispat becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı (Jones, 2000; Stylianides ve diğerleri, 2004) görülmektedir. Varghese (2008) matematik bölümü mezunu olan 17 öğretmenle gerçekleştirdiği çalışmasında "bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360^0 olduğunu ispatlayın" önermesine yönelik ispat yazmalarını istemiştir (s. 58). Verilen 14 yanıttan sadece iki öğretmenin ispatı şematik ve sözel formda, iki öğretmenin ise sembolik formda yazabildikleri görülmüştür. Diğer öğretmenler ise diyagram kullanarak, sözlü veya sembolik olarak kısmen doğru veya yanlış şekilde ispatlarını yapmışlardır. Öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat yapmada zorlanmalarının yanı sıra ispat yazmanın ne olduğu konusuna dair sınırlı bir anlayışa sahip oldukları ve deneysel varsayımları geçerli ispatlar olarak algıladıkları görülmektedir. Goetting (1995) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometride çizim yolu ile gerçekleştirilen örnekleri ve çözümleri ispat olarak kabul etme eğiliminde olduklarını göstermiştir. Benzer şekilde Knuth (2002), "herhangi bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180^{0}'dir" önermesi için, 5 matematik öğretmeninin örnek yolu ile açıklamalarını geçerli ispat olarak düşündüklerini ifade etmiştir. Çalışmada yer alan öğretmenlerden biri ise bu yolun geçerli bir ispat olduğunu fakat formal olmadığını belirtmiştir. Dickerson (2008) ise lise matematik öğretmenlerinin ispat anlayışlarını incelemiş ve geometride görsel ispatın yeterli ayrıntı içermediği için öğretmenler tarafından kabul edilemez olduğunu bildirmiştir. Özetle, yapılan çalışmalarda matematik öğretmeni ve adaylarının geometride ispat yazma konusunda zorluk yaşadıkları görülmektedir. Bu yüzden geometrik ispat yazma konusunda yaşanan zorlukların giderilmesi ve ispat yazma becerilerinin gelişimini destekleyen çalışmalar gerçekleştirilmiş ve öneriler sunulmuştur. Bu önerilerden bazıları; ders anlatmak (Wahlberg, 1997), örnek kullanımı ile soyutlama düzeyini azaltmak (Sowder ve Harel, 2003), ispatları sınıfta sunma (Freedman, 1983; Reisel, 1982), diyagram ve teknoloji kullanma (Hadas, Hershkowitz, ve Schwarz, 2000; Mariotti, 2000), matematikteki belirsizliklerden öğretimde yararlanmadır (Zaslavsky, 2005). Fakat bu önerilerin geometrik ispat öğretiminde yer verilmesi ve etkililiğinin görülmesi gerekmektedir.

Van Hiele Modeli

Öğrencilerin ispatları anlama, oluşturma ve başarılı olabilmelerini etkileyen pek çok faktör olduğu için öğrencilerin ispat bilgilerini, anlayışlarını ve geçerli ispat yazma becerilerinin gelişimine ilişkin çeşitli modeller (Balacheff, 1988; Dreyfus, 1999; Hanna, 2000; Knuth, Choppin, Slaughter, ve Sutherland, 2002; Marrades ve Gutierrez, 2000; Martin ve McCrone, 2009; Raman ve Weber, 2006; Sowder ve Harel, 1998) geliştirilmiştir. Bu modeller arasında geometrik düşünce gelişiminin ispatla sonuçlanan ilerlemesini açıklayan van Hiele modelidir (Fuys, 1985). van Hiele (VH) modeli, geometrik akıl yürütmenin ve ispatın çocuklarda doğal olarak oluşmadığını bir dizi düzey ile desteklenmesi gerektiğini belirtir (van Hiele, 1984). VH modeli, öğrencilerin geometrik kavram gelişimlerini ve ilerlemelerini ortaya koyan geometrik düşünme düzeylerini ve geometrik düşünce gelişimini destekleyen öğretim sürecini tanımlamaktadır. VH modeli üç parçalı bir modeldir: (1) Geometrik düşünce geliştikçe gelişen ardışık ve ayrık beş seviyeyi tanımlar, (2) geometrik kavramlara ilişkin anlayışı ortaya koyar, (3) geometri öğretiminde aşamalı gelişim için bir rehber sunar (Wu, 1994). VH modeline göre sıralı ve hiyerarşik yapıda olan beş geometrik düşünce düzeyi vardır. VH-1 (tanıma), şekillerin isimlerinin öğrenildiği ve fiziksel görünümlerine bağlı olarak tanımlamanın yapıldığı düzeydir. Bu düzeydeki öğrenci geometrik bir şekli bütün olarak ele alır, tanır ve adlandırır. Öğrenci, temel geometrik kavramların özelliklerini dikkate almadan bir bütün olarak algılar, görsel değerlendirmeler yolu ile akıl yürütür (Burger ve Shaughnessy, 1986). Öğrenci henüz geometrik kavramların tanımlarını ve özelliklerini anlamamıştır. Örneğin, öğrenci dikdörtgenin yamuktan farklı bir şekil olduğunu tanıyabilir fakat detaylı olarak şekillerin özelliklerine dayalı çıkarımda bulanamaz. VH-2 (analiz)'de geometrik şekiller özellikleri doğrultusunda tanımlanır. Bu düzeyde öğrenci geometrik şekillerin tanımlarını bilmez fakat "tüm üçgenlerin üç kenarı, tüm dörtgenlerin dört kenarı vardır" gibi ortak özelliklerin farklılaşan temel noktalarına göre geometrik şekilleri sınıflandırabilir (Knight, 2006). Örneğin, bu düzeydeki öğrenci tüm dörtgenlerin özelliklerini listeleyebilir, tanımlayabilir fakat karenin neden dikdörtgen olduğunu dikdörtgenin de neden paralelkenar olduğu gibi geometrik şekillerin henüz farklı sınıfa dahil olabileceğini anlayamayabilir. VH-3 (soyutlama), geometrik şekillerin mantıksal ilişkilere göre sınıflandırıldığı düzeydir (Burger ve Shaughnessy, 1986). Öğrenci bir şeklin özellikleri doğrultusunda bir geometrik şekil sınıfı ya da sınıfları arasında karşılıklı ilişkiler kurar ve sınıflandırma yapabilir. Örneğin, öğrenci bir dikdörtgenin paralelkenarın tüm özelliklerine sahip olduğu için paralelkenar olduğunu bilir. VH-4 (tümdengelim), bu düzeyde tümdengelimin önemi anlaşılır ve varsayımların, tanımların, teoremlerin ve ispatın rolleri kavranır. Aksiyomatik sistemlerin özelliklerinin anlaşıldığı ve ispatın yapılabildiği düzeydir. Bu düzeyde öğrenciler geometrik şekil ve terimlerin tanımlarını anlar ve varsayımlarda bulunabilir. Öğrenci bir şeklin belirli bir geometrik şekli niteleyebilmesi için gerek ve yeter koşulları ifade edebilir (Hershkowitz, Bruckheimer, ve Vinner, 1987). Örneğin, öğrenci bir şeklin dörtgen olması için dört kenarı olması yeterlidir ancak paralelkenar olması için karşılıklı kenarlarının eş ve paralel olması gerektiği varsayımında bulunabilir ve bu varsayımını ispatlayabilir. Son olarak VH-5 (matematikleştirme)'te geometrideki aksiyomatik sistemler tam olarak kavranmış olunur ve soyut çıkarımlar yapılabilir (Battista ve Clements, 1995). Öklid dışı geometri gibi farklı aksiyomatik sistemler anlaşılır ve bu sistemlere ilişkin karşılaştırmalar yapılabilir. Örneğin, öğrenci aksiyomları ve tanımları manipüle etmenin sonuçlarını analiz edebilir. de Villiers (1987), geometride tümdengelimli akıl yürütmenin ilk olarak kavramların özellikleri arasında mantıksal ilişkinin kurulduğu VH-3'te olduğunu öne sürmektedir. VH-1 ve VH-2'de yer alan öğrenciler ise deneysel gözlemlerinin geçerliliğinden şüphe duymadıkları için formal ispata gerek görmemektedirler (Battista ve Clements, 1995; de Villiers, 1987; Senk, 1989; van Dormolen, 1977).

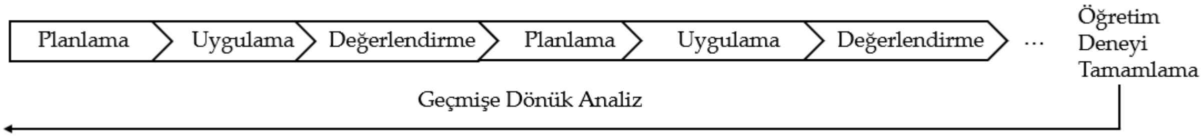
VH modeli öğrencilerin geometriyi nasıl anladıklarının ortaya konulmasında kabul görmüş bir modeldir (Burger ve Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes, ve Tischer, 1988; Usiskin, 1982). Bunun yanı sıra bazı araştırmacılar (Clements, Battista, Sarama, ve Swaminathan, 1997; Sarama ve Swaminathan, 1997) ise modelin küçük yaş çocuklarının geometri algısını tam olarak kapsamadığını ifade etmişlerdir. Clements ve Battista (1992), VH modelde Düzey 1'den önce Düzey 0'ı tanımlamış ve dahil etmişlerdir. VH-0 (biliş-öncesi), düzeyinde öğrenciler bazı geometrik şekilleri görsel özelliklerine göre adlandırabilir fakat aynı sınıf içerisinde yer alan geometrik şekilleri ve isimleri karıştırabilir (Clements ve Battista, 1992). Bu çalışmanın hedef kitlesi matematik öğretmeni adayları olduğu için van Hiele (1984) tarafından tanımlanan düzeyler (1-5) temel alınmıştır.

VH modeline göre öğrenciler tüm seviyeleri sırasıyla geçerlerse geometrik ispat yazmada başarılı olabilirler. Yani öğrencilerin (n) düzeyinde başarılı olabilmeleri için (n-1) düzeyinde başarılı olmaları gerekmektedir (Usiskin, 1982). Bu sebeple öğrencilerin üst seviyeye hazırlanmaları gerekmektedir. Bir seviyeden diğer seviyeye olan ilerleme yaş veya olgunluğa göre değil öğrencinin içinde bulunduğu öğrenme ortamına bağlıdır. Bu doğrultuda VH modelinde öğrencilerin bir seviyeden diğer seviye/lere geçişlerindeki öğretim sürecini tanımlanmıştır (van Hiele, 1984): (1) bilgi ve sorgulama, (2) rehberlik etme/destekleyici yönlendirme, (3) açıklama/yorumlama, (4) serbest yönlendirme ve (5) entegrasyon. Bu öğretim unsurlarının öğretim sürecine dâhil edilerek uzun süreli gerçekleştirilecek bir öğretim planı izlenmelidir. Bilgi ve sorgulama sürecinde, öğrencilere ilgili geometrik kavramlar sunularak öğrencilerin bu kavramlara ilişkin bilgileri ortaya çıkarılır. Öğrencilerin geometrik şekillere ilişkin yapmış oldukları açıklamaları sorgulanarak açıklama ve gerekçelendirmede bulunmaları, bu sayede öğretmenlerini ve arkadaşlarını ikna etme becerileri desteklenir. Rehberlik etme veya destekli yönlendirmede, öğrenciler geometrik şekillerin örtük özelliklerini keşfederler. Bu aşamada öğretmen öğrencilere destekleyici görevler vererek öğrencilerin yeni geometrik kavramların özelliklerini ve ilişkilerini fark etmelerini destekler. Öğrenciler tarafından bağlama ilişkin ilişkiler keşfedilir ve tartışılır, öğretmen ise yönlendirici sorular yöneltir: "Eşkenar bir dörtgen köşegeni doğrultusunda katlandığında ne olur?". Bir diğer aşama olan açıklama ve yorumlamada öğrencilerin keşfettikleri ilişkileri matematiksel olarak temsil etmeleri sağlanır. van Hiele (1984), öğrencilerin geometrik kavrama ilişkin özellikleri tanıdıktan sonra matematiksel dil ve sembol kullanımının daha etkili olduğunu belirtmektedir. Bu doğrultuda öğrencilerin keşiflerinin ardından öğretmen "fark ettiğiniz şekil ve özelliklerin ne anlama geldiğini tartışalım. Köşegenler simetri çizgilerinin üzerindedir. İki simetri çizgisi vardır ve karşılıklı açılar birbirine eşittir. Köşegenler tepe açılarını ikiye böler" şeklinde matematiksel dil ve terminolojiye yer verir. Bu aşamadan sonra öğrencilerin daha karmaşık görevlerde bağımsız olarak çalışmaları beklenmektedir. Öğrenciler geometrik kavramların ilişkilerine daha hâkimlerdir fakat bazı durumlarda karmaşık yapıların tanımlanmasında desteğe ihtiyaç duymaktadırlar. Bu faaliyetlerde öğretmenin desteği daha açık uçludur. Örneğin bir öğretmen şöyle diyebilir: Sadece iki kenarı verilmiş olan bir eşkenar dörtgeni nasıl oluşturabilirsiniz? Bu aşamada öğrencilerin çalışmalarını kendilerinin yapabilmesi için daha açık uçlu bir yönlendirme yapılmaktadır. Öğretim sürecindeki son evre ise entegrasyondur. Bu aşamada yeni bir bilginin öğretimi değil öğrencilerin edindikleri bilgileri farklı bağlamlarda kullanmaları ve yapılandırmaları hedeflenmektedir. VH modeline göre, öğrencinin bulunduğu öğrenme ortamında sunulan öğrenme fırsatları, örnekler ve uygulamalar ilerlemeyi destekleyen önemli unsurlardır. Öğrenenlerin öncelikle VH modelinin hangi geometrik seviyesinde olduklarının belirlenerek buna uygun bir geometri öğretimi ile zenginleştirilmelidir (Clements, 2003). Bu doğrultuda gerçekleştirilecek bu çalışma ile matematik öğretmeni adaylarının geometri konularında ispat yazma konusunda etkili bir öğretim ile ispat yazma becerilerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bu çalışma ile matematik öğretmeni adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişiminde etkili bir geometri öğrenme ortamının düzenlenmesine katkıda bulunulacaktır.

Yöntem

Bu çalışma, nitel araştırma olarak desenlenmiştir. Nitel araştırmalar, çeşitli olgu ve durumların derinlemesine incelenmesine ve bütüncül bir yaklaşımla değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır (Fraenkel ve Wallen, 2009). Çalışmada, VH modelinin matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yazma becerilerine ilişkin etkililiğinin ortaya konulması amaçlandığı için nitel yöntemlerden biri olan öğretim deneyi benimsenmiştir.

Öğretim deneyi, belirli bir öğrenme hedefi doğrultusunda planlanan öğretim etkinliklerinin araştırmacı/öğretmen tarafından uygulanmasını içermektedir (Cobb, 2000). Öğretim deneyi, gelişimsel bir araştırma biçimi olması bakımından bir müdahalenin uygulanması yoluyla gerçekleştirilir. Bu doğrultuda öğretme deneyinde gerçekleştirilen pek çok öğretme olayı ve klinik görüşmeler mevcuttur (Yackel, Gravemeijer, ve Sfard, 2015). Bu yöntemde belirli bir öğrenme hedefi doğrultusunda araştırmacılar tarafından hazırlanan, planlanan ve geliştirilen "öğretim" etkinlikleri yer almakta ve uygulanması planlanan katılımcılar ile "deney"imlenmektedir. Uygulama sürecinde araştırmacı ve katılımcılar arasında uzun süreli etkileşim söz konusudur. Öğretim deneyinde veriler genellikle niteldir ve öğretim uygulamalarının kayıtları, klinik görüşmeler, gözlemler, yansıtıcı günlükler ve çalışma kağıtları nitel verileri oluşturmaktadır (Cobb, 2000). Nitel verilerin elde edilmesinin takibinde, öğretim etkinlikleri öğrencilerin öğrenme hedeflerini desteklemedeki etkililiği incelenmek için analiz edilir. Öğretim deneyi yinelemeli bir süreç içermektedir. Öğretim etkinlikleri, hedeflenen öğrenme hedeflerini daha iyi sağlayacak şekilde uygulanır, analiz edilir ve geliştirilir. Öğretim deneyinin tamamlanmasının ardından öğretim deneyi boyunca toplanan tüm veriler geriye dönük olarak analiz edilir. Bu çalışmada, geometri öğretiminde VH modeli öğrenme etkinliklerinin geliştirilmesi, uygulanması ve öğretmen adaylarının ispat yazma beceri durumlarının gelişimlerinin analiz edilmesi ile VH modelinin etkililiğinin ortaya konulması sağlanacaktır (Şekil 1).



Şekil 1. Bu çalışmada gerçekleştirilen öğretim deneyi modeli.

Çalışma Grubu

Çalışma, bir devlet üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan birinci sınıf öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla 57 matematik öğretmeni adayı arasından 10 kişi çalışmaya dahil edilmiştir. Öğretmen adaylarının çalışmaya dahil edilmesinde amaçlı örneklem kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının çalışmaya katılmaya gönüllü olmaları ve farklı VH düzeyinde olmaları ölçüt olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının VH düzeylerinin belirlenebilmesi amacıyla araştırmacılar tarafından 10 geometrik ispat sorusunun yer aldığı form uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının vermiş olduğu yanıtlar değerlendirilerek geometrik ispat yapmada zorlanan, hatalı ispatlama yapan ve ispat yerine örneklendirme yolu ile geçerli ispat yaptığını düşünen öğretmen adayları çalışmaya dahil edilmiştir. Bu sayede geometrik ispatlamada VH-0 ve VH-1 düzeylerindeki öğretmen adaylarının çalışmada yer almaları sağlanmıştır. Katılımcı öğretmen adaylarının gizliliğinin sağlanması amacıyla Ö1, Ö2,…,Ö10 şeklinde kodlama yapılmıştır.

Çalışmada yer alan öğretmen adayları birinci sınıfta öğrenim görmektedirler. Matematik öğretmenliği programının birinci yarıyılını tamamlamışlar ve Matematiğin Temelleri-I, Analiz-I alan derslerini almışlardır. Bu alan dersleri kapsamında öğretmen adaylarının matematikte ispat ve ispat çeşitlerine ilişkin bilgileri olmakla birlikte ispat çeşitlerini uygulamalı olarak bu alan derslerinde gerçekleştirmişlerdir. Çalışmanın gerçekleştirildiği ikinci yarıyılda öğretmen adayları, Matematiğin Temelleri-II, Analiz-II ve Soyut Matematik alan derslerinde öğretim görmektedirler. Bu alan derslerinde yoğun şekilde ispat yapılmaktadır. Matematiğin Temelleri-II dersinde ise geometrik kavramların öğretimi yer almakla birlikte öğretmen adaylarının geometrik kavram ve tanımlara ilişkin bilgileri mevcuttur.

van Hiele Modeli Öğretim İçeriği

VH modeline dayalı olarak araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarının geometrik düşünce gelişimlerini sağlamak ve dolayısıyla ispat yazma becerilerinin gelişimi ile sonlanan VH modelinde ileri düzeylerde yer almaları amacıyla öğretim içeriği geliştirilmiştir. Planlanan öğretim içeriği öğretmen adayları ile ders dışı zamanlarda haftalık 2 saat olacak şekilde gerçekleştirilmiştir. Bu öğretim etkinlikleri Tablo 1'de sunulmaktadır.

Tablo 1. *VH modeline dayalı öğretim içeriği ve zaman çizelgesi*

Hafta	Öğretim etkinliklerinin içeriği
1	Etkinlik-1: Geometrik şekilleri isimlendirme Bu etkinlikte öğretmen adaylarının geometrik şekilleri isimlendirme, tanımlama ve özelliklerini doğrulama çalışmaları gerçekleştirilir. Ardından sınıf içi tartışmalar yolu ile şekilleri sınıflandırma yapılır. Etkinlik-2: Temel geometrik şekilleri isimlendirme Bu etkinlikte tanımlı ve tanımsız kavramlar sunulur ve ardından Öklid'in postulatlarına ilişkin tanımlamalar ve açıklamalar gerçekleştirilir.
2	Etkinlik-3: Doğruların birbirlerine göre durumları ve açıların özellikleri Bu etkinlikte doğruların durumları ve açıların özelliklerine yönelik önermelerin ispatı gerçekleştirilir. Bu ispatlarda ilk olarak öğretmen adaylarının temel geometrik çizimler yolu ile ispat yazmalarına rehberlik edilir ardından kendi açıklamalarını ve gerekçelendirmelerini sunmada serbest yönlendirme yapılır.
3	Etkinlik-4: Üçgenlerin özelliklerini tanımlama ve sınıflandırma Bu etkinlikte üçgenlerin açı ve kenar özelliklerinin tanımlanmasına ve buna bağlı olarak sınıflandırmalar yapılır.
4	Etkinlik-5: Üçgenlerin yardımcı elemanlarının özelliklerini tanımlama ve ilişkilendirme

	Öğretmen adaylarının üçgenlerde açıortay, kenarortay ve yükseklik özelliklerini tanımlamaları ve ispatlamaları gerçekleştirilir.
5	Etkinlik-6: Üçgenlerin alan özelliklerini tanımlama ve ilişkilendirme Üçgenlerde alan bağıntılarına ilişkin önermelerin ispatı yapılır. Alan bağıntılarının bulunmasında ilişkilendirme yapılır (dörtgen, çember ile)
6	Etkinlik-7: Çokgenlerin köşe, kenar ve açı özelliklerini tanımlama, sınıflandırma ve mantıksal ilişki kurma Bu etkinlikte çokgenlerin özelliklerinin ispatlanması ve buna bağlı olarak geometrik şekillerin sınıflandırmaları gerçekleştirilir. Ardından içbükey ve dışbükey dörtgenlerin açı özelliklerine ilişkin önermelerin ispatı gerçekleştirilir.
7	Etkinlik-8 & 9: Dörtgenlerin açı, kenar, köşegen özelliklerini tanımlama, sınıflandırma, mantıksal ilişki kurma ve ispatlama Bu etkinlikte öğretmen adaylarının her bir dörtgenin özelliklerini tanımlarlar, birbirlerinin özellikleri arasında ilişki kurarlar, sınıflandırma yaparlar (alt küme ile) ve çıkarımlarını ispatlarlar.
8	Etkinlik: 10 & 11: Çember özelliklerini açıklama Bu öğretim etkinliğinde çemberin kiriş, teğet ve yay özellikleri öğretmen adayları tarafından tanımlanır ve ispatlanır. Ardından bu özelliklere bağlı olarak açı durumlarına ilişkin önermelerin ispatı gerçekleştirilir.

Öğretim etkinliklerinin planlanmasında VH modelindeki düzeyler ve van Hiele (1984) tarafından tanımlanan geometrik düşüncenin gelişimini destekleyen öğretim ortamı unsurları temel alınmıştır. Bunlar: (1) bilgi ve sorgulama, (2) rehberlik etme/destekleyici yönlendirme, (3) açıklama/yorumlama, (4) serbest yönlendirme ve (5) entegrasyon şeklindedir. Bu unsurlar ve VH düzeyleri gözetilerek planlanan öğretim etkinlikleri iki boyutlu (2B) geometrik şekillerin öğretimini kapsamaktadır. Etkinliklerde öğretmen adaylarının bireysel çalışmaları hedeflenmiş bu sebeple geometri konularına ilişkin bireysel çalışma yaprakları oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarının bireysel çalışmalarının ardından sınıf içi tartışmalar yolu ile gerçekleştirdikleri ispatlarının değerlendirmesi yapılmıştır.

Öğretim etkinliklerinde ilk olarak 2B geometrik şekillerin ortak özelliklerinin öğretmen adayları tarafından tanımlama, analiz etme ve doğrulama yapabilme durumlarına ilişkin etkinlikler gerçekleştirilmiştir. Bu etkinliğin takibinde öğretmen adaylarının VH düzeylerinde düşünce gelişimlerini sağlamak amacıyla doğrular, açı, üçgen, dörtgen ve çember konularına ilişkin önermeler sunulmuştur. Bu konularda sunulan önermelerin ispatında rehberli bir tartışma yolu ile birbirlerine soru sorma ve ikna etmeye çalışmaları, gerekçelendirme yapmaları sağlanmıştır. Ardından serbest yönlendirme yolu ile öğretmen adaylarının edindikleri ispat yazma becerilerini farklı önermelerde kullanmaları sağlanmıştır.

Veri Toplama

Çalışmada veri toplama araçları olarak öğretim deneyi öncesi gerçekleştirilen bireysel görüşmeler, öğretim deneyi boyunca gerçekleştirilen sınıf içi çalışmalarının ses ve video kayıtları, araştırmacı alan notları ve öğretmen adaylarının bireysel çalışma kağıtları yer almıştır. Clements (2003)

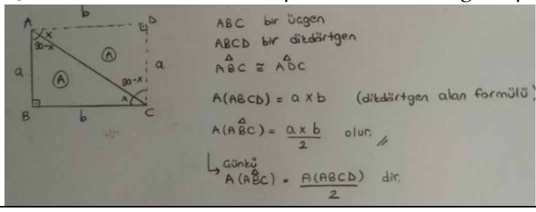
VH modelinin uygulanma öncesinde öğrencilerin hangi geometrik seviyesinde olduklarının belirlenerek buna uygun bir geometri öğretimi yapılması gerektiğini belirtmiştir. Bu amaçla öğretim deneyi öncesi öğretmen adaylarının çalışmaya dahil edilmesinde bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler öğretmen adaylarının öğretim deneyi öncesi VH düzeylerini belirlemek amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla araştırmacılar tarafından geometrik ispat yapma gerektiren 10 sorunun yer aldığı ispat formu hazırlanmıştır. Formda yer alan sorularda arasında "sunulan geometrik şekilleri sınıflandırınız ve gerekçelendiriniz", "paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı iç ters açı çiftlerinin ölçüleri birbirine eşittir, ispatlayınız" şeklinde örnek durumlara yer verilmiştir. Formda yer alan soruların kapsam geçerliliği ve anlaşılabilirliğinin değerlendirilmesi amacıyla uzman görüşleri alınmış ve son hali verilmiştir. Öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen bireysel görüşmeler sonucunda öğretim deneyi öncesi VH düzeyleri belirlenmiştir.

VH modeline dayalı 8 hafta gerçekleştirilen sınıf çalışmalarında öğrencilerin bireysel çalışmaları çalışma kağıtları ile sınıf içi uygulamalar ise ses ve video kayıtları ile kaydedilmiştir. Bunun yanı sıra araştırmacı aynı zamanda gözlemci olarak alan notları kaydetmiştir. Her bir geometri konusuna ilişkin çalışma kağıtları araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Çalışma kağıtlarında ilgili geometri konusuna ilişkin önermelere yer verilmiştir. Ardından çalışma kağıtlarında yer alan önermelerin kapsam ve düzeye uygunluklarının değerlendirilmesi amacıyla uzman görüşü alınarak düzenleme yapılmıştır. Öğretim etkinliklerinde öğretmen adaylarının çalışma kağıtlarında sunulan ilgili önermeyi bireysel olarak ispatlamaları, ardından sınıf içi tartışmalar yolu ile açıklama, gerekçelendirme ve genellemeye varmaları hedeflenmiştir. Öğretmen adaylarının gerçekleştirmiş oldukları sınıf içi çalışmaları video ve ses kayıtları ile eksiksiz olarak kaydedilmiştir.

Verilerin Analizi

Çalışmada, nitel veriler van Hiele (1984) tarafından tanımlanan geometrik düşünce gelişim düzeylerine göre analiz edilmiştir. Bu şekilde daha önceden belirlenen temalar çerçevesinde verilerin analiz edilmesi betimsel analiz olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bireysel görüşmeler, ses ve video kayıtları, öğretmen adaylarının çalışma kağıtları ve araştırmacı alan notları çalışmanın nitel verilerini oluşturmaktadır. Öğretim deneyi öncesi gerçekleştirilen bireysel görüşmelere ait ses kayıtları yazıya çevrilmiş ve her bir öğretmen adayı için ayrı ayrı dosyalanmıştır. Öğretim etkinliklerine ait alan notları, ses ve video kayıtları ise her bir etkinlik için yazıya çevrilmiş ve dosyalanmıştır. van Hiele (1984) tarafından tanımlanan VH düzeyleri analizin tematik çerçevesini oluşturmuştur. Bu sayede kodlamaların yapılacağı kategoriler belirlenmiştir. VH düzeylerine yönelik literatürde (Daguplo, 2014; van Hiele, 1984; Senk, 1985) yapılan açıklamalar temel alınarak araştırmacılar tarafından bağımsız olarak kodlamalar yapılmıştır. Farklı veri kaynaklarından elde edilen verilerin karşılaştırması ve teyit edilmesi sonucunda kodlamalar gerçekleştirilmiştir. Buna ilişkin örnek kodlama Tablo 2'de sunulmuştur. Bağımsız gerçekleştirilen kodlamaların ardından araştırmacılar bir araya gelmişler ve gerçekleştirdikleri kodlamaları ve gerekçelerini karşılıklı olarak sunmuşlardır. Kod değerlendirmesi sonrasında tematik çerçevesi oluşturan VH düzeyleri doğrultusunda kategorilere ulaşılmıştır.

Tablo 2. *Analiz şeması ve örnek kodlamalar*

Düzey	Kodlama
VH-1	Ö3: *Dikdörtgen şekline benzediğini söyleyebiliriz.*
VH-2	Ö4: *Herhangi bir dörtgen hangi özelliği sağlarsa o sınıfa yerleştiririz. Örneğin paralelkenarın özelliklerini sağlarsa, şekli bu sınıfa yerleştiririz.*
VH-3	Ö9: *Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgene paralelkenar denir.*
VH-4	Ö7: 

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Bu araştırmanın geçerliliği amaçlı örneklem, veri çeşitlemesi, uzman görüşü ve öğretim deneyinin detaylı sunulması ile sağlanmıştır. Nitel araştırma olan bu çalışmada, farklı veri toplama araçları olan görüşme, gözlem ve dokümanların (öğretmen adayı çalışma kağıtları ve araştırmacı alan notları) beraber kullanılması elde edilen verilerin teyidini sağladığı için inandırıcılığı sağlanmıştır. Nitel araştırmalarda katılımcı özelliklerinin ve uygulama içeriğinin detaylı sunulması ile transfer edilebilirlik sağlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu çalışmada, öğretmen adaylarının özellikleri ve geçmiş deneyimleri aynı zamanda öğretim deneyinin içeriğinin detaylı sunulması ile transfer edilebilirliği sağlanmıştır. Bu sayede çalışmanın benzer çalışmalara uyarlanabilirliği sağlanmıştır. Veriler, iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı kodlanarak tutarlık sağlanmış ve gerçekleştirilen bağımsız kodlamalar sonrasında bir araya gelinerek fikir birliği sağlanmış ve temalara ulaşılmıştır. Bu sayede iç tutarlığın ve güvenirliğin sağlanması amaçlanmıştır.

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri:

Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı = Yozgat Bozok Üniversitesi

Etik değerlendirme kararının tarihi= 20 Ocak 2021

Etik değerlendirme belgesi sayı numarası= 3198

Bulgular

Çalışmanın bulguları (1) öğretim deneyi öncesi ve (2) VH modeline dayalı öğretim etkinliklerinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin düzeyleri olmak üzere iki aşamada ele alınmıştır. Öğretim etkinlikleri öncesinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerileri VH düzeyleri kapsamında değerlendirilmiş ve sonuçları Tablo 3'te sunulmuştur.

Tablo 3. *Öğretim etkinlikleri öncesinde öğretmen adaylarının ispat yazma düzeyleri*

Düzey	**Katılımcı**
VH-1	Ö1, Ö2, Ö3, Ö5
VH-2	Ö4, Ö7, Ö8, Ö9
VH-3	Ö6, Ö10

Tablo 3'te yer alan bulgulara bakıldığında, öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin çoğunlukla VH-1 (n=4) ve VH-2 (n=4) düzeyinde olduğu görülmektedir. Öğretim etkinlikleri öncesinde gerçekleştirilen bireysel görüşmelerde öğretmen adaylarına geçerli geometrik ispat yazmalarının hedeflendiği sorular yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarına yöneltilen sorulardan biri "*iki dik açısı olan bir üçgen olabilir mi?*" sorusu olmuştur. Bu soruya ilişkin Ö2'nin açıklaması "*olamaz çünkü olduğu taktirde üçgenin iç açıları toplamı 180^0'den fazla olur*" şeklinde olmuştur. Benzer şekilde Ö5 de "*üçgenin iç açıları toplamı 180^0 olduğu için olmaz*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Örnek öğretmen adaylarının açıklamalarına bakıldığında üçgenin iç açıları toplamı özelliğini belirttikleri ve geçerli ispatlama yapmadıkları görülmektedir. Buna dayalı olarak öğretim etkinlikleri öncesinde öğretmen adaylarının geometrik düşünce gelişimlerinin düşük düzeyde olduğu dolayısıyla geçerli ispat yazmada yetersiz oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Bunun yanı sıra Ö6 ve Ö10 öğretmen adaylarının tümdengelim/mantıksal çıkarım düzeyinde oldukları görülmektedir. Aynı örnek görüşme sorusuna ilişkin Ö6'nin açıklamaları

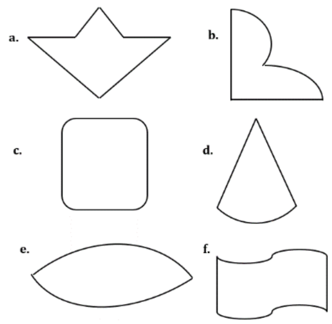
> bir üçgenin köşelerinden geçen bir çevrel çember çizdiğimizde bu üçgenin açıları çevre açılar olurlar. Bu açıların gördükleri yay uzunlukları açının ölçüsünün iki katıdır. Çember yayının ölçüsü 360^0 olduğunu biliyoruz, buradan sonuçlar üç noktanın doğru ile kesişimlerinin üçgen belirtebilmesi için iki dik açı olamaz diyebiliriz

şeklinde olmuştur. Bu doğrultuda bu iki öğretmen adayının geçerli ispat yazımının kabul edilen ilk düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Genel olarak öğretmen adaylarının öğretim etkinlikleri öncesinde ispat yazma becerileri değerlendirildiğinde ispat yazma becerilerinin yetersiz olduğu, ispat yazma konusunda zorlandıkları ve kısıtlı anlayışa sahip oldukları sonucuna ulaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişiminin hedeflendiği VH modeli öğretim deneyi sürecinde yer alan örnek uygulamalar ve öğretmen adaylarının ispat yazma düzeyleri aşağıda sunulmuştur.

VH-1 Düzeyine İlişkin Bulgular

Çalışmada, öğretmen adaylarının ilgili öğretim etkinliklerinde çeşitli geometrik kavramları tanımlamaları, açıklamaları ve sınıflandırmaları istenmiştir. Bu uygulamalar VH modelinin bilgi ve sorgulama aşaması doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, ilk olarak öğretmen adaylarının geometrik şekilleri (Şekil 2) incelemeleri ve ardından adlandırma ve sınıflandırma yapmaları istenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının sunulan geometrik şekillere ilişkin örnek açıklamaları sunulmuştur.



Şekil 2. Öğretim etkinliğinde kullanılan örnek geometrik şekiller.

Geometrik şekillerin özelliklerinin tanımlanması, açıklanması ve sınıflandırılması etkinliğinde öğretmen adaylarının bilgileri sorgulanmıştır. Bu süreçte Ö2'nin

> bu şekiller için geometrik şekil diyebilir miyiz, emin değilim. c şekli dikdörtgene benziyor ama diğerleri geometrik şekil değil bence" ve Ö3'ün açıklaması "Bu mantıkla düşünürsek d şekli üçgene b şekli dik üçgene f ise dikdörtgene benziyor diyebiliriz ama bunlar tanıdığımız geometrik şekiller değiller

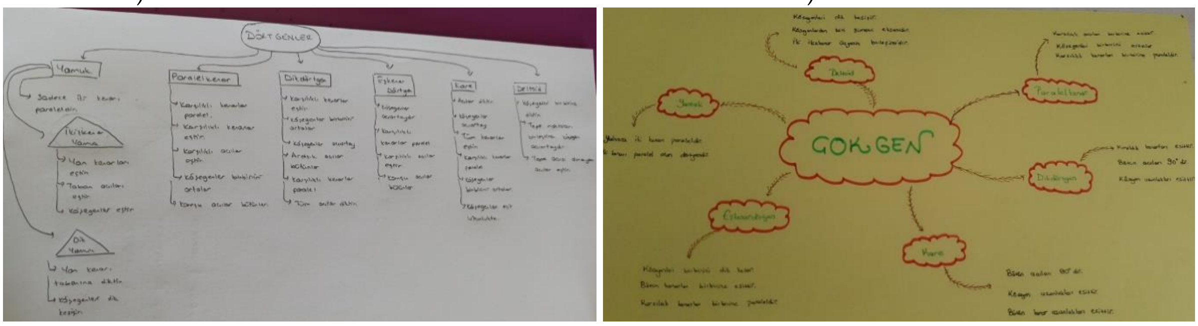
şeklinde olmuştur. Ö2 ve Ö3 kodlu öğretmen adaylarının geometrik şekillerin görünüşlerine dayalı olarak özelliklerini tanımladıklarını ve yetersiz akıl yürütmeleri sebebiyle VH-1 düzeyinde oldukları görülmektedir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının geometrik şekillerin özelliklerini bilmedikleri bu sebeple neden-sonuç ilişkisi kuramadıkları, açıklamalarında ise gerekçelendirmede yapamadıkları görülmektedir. Bu sonuçlar doğrultusunda geometrik şekillerin sınıflandırılmasında Ö2 ve Ö3'ün akıl yürütme becerilerinin sınırlı olduğu söylenebilir.

VH-2 Düzeyine İlişkin Bulgular

Öğretmen adaylarının geometrik şekil ve kavramlara ilişkin bilgileri öğretim etkinlikleri sürecinde ortaya çıkarılmış ve bu bilgileri sorgulanmıştır. Bu süreçte öğretmen adaylarına yönlendirici sorular ile rehberlik edilmiş ve gerek duyulan durumlarda açıklamalarda bulunulmuştur. Bazı öğretmen adaylarının geometrik şekillerin tanımlarını bilmeden sadece geometrik şekillerin özelliklerine dayalı sınıflandırmalarda bulundukları görülmektedir. Geometrik şekillerin sınıflandırılması etkinliğinde Ö1 sunulan görseldeki (Şekil 2) şekillere yönelik "*tanıdığımız geometrik şekillere benzemiyorlar. Tanıdığımız geometrik şekilleri kaç kenarı varsa ona göre; üçgen, dörtgen, beşgen, vb. şeklinde sınıflandırıyoruz. Ama burada kenar tam olarak yok*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Benzer şekilde Ö5 kodlu öğretmen adayı *"a seçeneği hariç diğer şekillerin kenarları düz değil"* açıklamasında bulunmuştur. Ö1 ve Ö5'in açıklamasına bakıldığında geometrik şekillerin tanımlarına dayalı olarak değil özelliklerine odaklanılarak açıklamada bulundukları ve buna göre sınıflandırma yaptıkları görülmektedir. Bu doğrultuda Ö1 ve Ö5 kodlu öğretmen adaylarının geometrik şekilleri sınıflandırmada VH-2 düzeyinde oldukları görülmüştür.

Dörtgenlerin sınıflandırılması etkinliğinde ise Ö4 ve Ö10 kodlu öğretmen adaylarının, dörtgenlerin hiyerarşik yapısını oluşturmada geometrik şekillerin özellikleri doğrultusunda sınıflandırma yaptıkları görülmektedir (Şekil 3).

a) b)



Şekil 3. a) Ö4 ve b) Ö10 öğretmen adaylarının dörtgen sınıflandırmaları.

Dörtgenlerin hiyerarşik yapısına ilişkin gerçekleştirilen etkinlikte Ö4 ve Ö10 kodlu öğretmen adaylarının geometrik şekillerin özelliklerini detaylı olarak listeledikleri ve bu özelliklere dayalı sınıflandırma yaptıkları görülmektedir. Şekil 3'te görüldüğü üzere, Ö4 ve Ö10 kodlu öğretmen adaylarının dörtgenleri yamuk grubu, paralelkenar grubu, vb. olarak sınıflandırdıkları fakat sınıflar arası bağlantıyı kuramadıkları görülmektedir. Öğretmen adaylarının sınıflandırma durumları sorgulandığında Ö4 *"herhangi bir dörtgen hangi özelliği sağlarsa o sınıfa yerleştiririz. Örneğin paralelkenarın özelliklerini sağlarsa, şekli bu sınıfa yerleştiririz"* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Etkinliğin devamında öğretmen adaylarına eşkenar dörtgen ve deltoid arasında bir ilişkinin olup olmadığı sorgulanmıştır. Ö3'ün buna ilişkin açıklaması *"deltoid özel bir dörtgendir fakat eşkenar dörtgen ile ilişkilendirmesi yoktur"* şeklinde olmuştur. Benzer şekilde Ö7 kodlu öğretmen adayı da ilişkilendirmede bulunamamış ve *"eşkenar dörtgen en özelleşmiş dörtgen, deltoid ise daha farklı özellikleri var, ortak özellikleri yok gibi"* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının dörtgenleri sınıflandırabildikleri fakat şekilleri farklı bir sınıfın parçası olarak göremedikleri sonucuna ulaşılmaktadır. Buna bağlı olarak Ö3, Ö4, Ö7 ve Ö10 kodlu öğretmen adaylarının dörtgenlerin hiyerarşik yapısını oluşturmada VH-2 düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Dörtgenlerin tanımlanmasının istendiği etkinlikte öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımların gerek ve yeter koşul belirten ekonomiklik ölçütünü sağlamadığı bunun yerine şekillerin özelliklerini ifade eden açıklamalardan oluştuğu görülmektedir. Örneğin, Ö6 kodlu öğretmen adayının paralelkenar tanımı *"dört kenarı olan, karşılıklı kenarları paralel ve eşit, iç açıları toplamı 360^0'dir"* şeklinde olmuştur. Benzer şekilde Ö2 kodlu öğretmen adayı kare tanımında "*dört kenarı olan, kenarları birbirine eşit, karşılıklı kenarları paralel, tüm açıları birbirine eşit ve* 90^0" şeklinde açıklamalarda bulunmuştur. Buna bağlı olarak Ö2 ve Ö6 kodlu öğretmen adaylarının geometrik kavramları tanımlamada gereğinden fazla özelliği ifade ettikleri ve bu sebeple VH-2 düzeyinde oldukları görülmektedir.

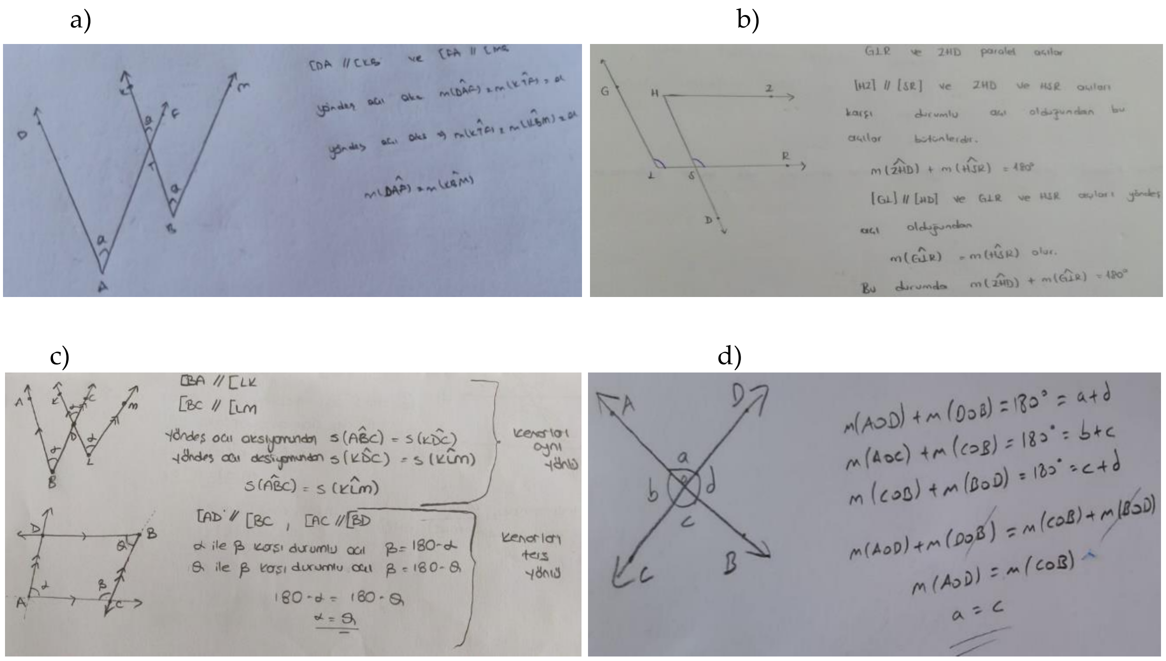
VH-3 Düzeyine İlişkin Bulgular

Geometrik kavramlara ilişkin bilgilerin sorgulandığı etkinlikte VH-2 düzeyinde olan öğretmen adaylarının (Ö2 ve Ö5) yanı sıra geometrik şekillerin tanımına dayalı çıkarımda bulunup VH-3 düzeyinde olan öğretmen adayları da bulunmaktadır. Şekil 2'de sunulan geometrik şekillerin sınıflandırılmasına ilişkin Ö5 kodlu öğretmen adayı

> noktalar ve bu noktaların doğru parçaları ile kesişimlerinden oluşuyorlar. Kaç kenarlılarsa üçgen, dörtgen, beşgen, vs. denir. Yani ben şu an çokgeni tanımladım. Bu tanıma göre sadece a şekli bir çokgendir diyebiliriz. Hatta iç bükey çokgen diye de özelleştirebiliriz

şeklinde açıklama yapmıştır. Ö7 kodlu öğretmen adayı ise "*Evet, diğer şekiller ise eğrilerden oluşuyor bunlar da kapalı eğri oluyor*" ve bu açıklamanın devamında Ö10 kodlu öğretmen adayı *"a şekli çokgen ama diğerlerini sınıflandıramayız"* şeklinde tanımdan yola çıkarak geometrik şekillerin sınıflandırmasına ilişkin çıkarımda bulunmuşlardır. Bu doğrultuda Ö5, Ö7 ve Ö10 öğretmen adaylarının çokgen, iç bükey/dış bükey ve eğri özellikleri doğrultusunda görselde yer alan şekillerin özelliklerine ilişkin karşılaştırmalarda ve çıkarımda bulundukları ve bu sebeple geometrik şekilleri adlandırma ve sınıflandırmada VH-3 düzeyinde yer aldıkları sonucuna ulaşılmaktadır.

Doğruların birbirlerine göre durumlarının ve açılarının özelliklerinin incelendiği etkinlikte öğretmen adaylarına doğruların birbirlerine göre durumlarının ve buna dayalı olarak açıların ölçülerinin özelliklerinin incelenmesi istenmiştir. Bu etkinlikte doğrularda belirtilen açı çiftlerinin eşitliği sorgulanmış ve öğretmen adaylarının çalışmalarında "acaba doğruların çakışması durumunda ne olur?" veya "doğruların paralelliğinin farklı konumlarında açıların eşitliği değişir mi?" gibi sorularla serbest yönlendirmede bulunmuştur. Şekil 4'te Ö4, Ö5, Ö7 ve Ö9 kodlu öğretmen adaylarının sundukları örnek çıkarımlar yer almaktadır.

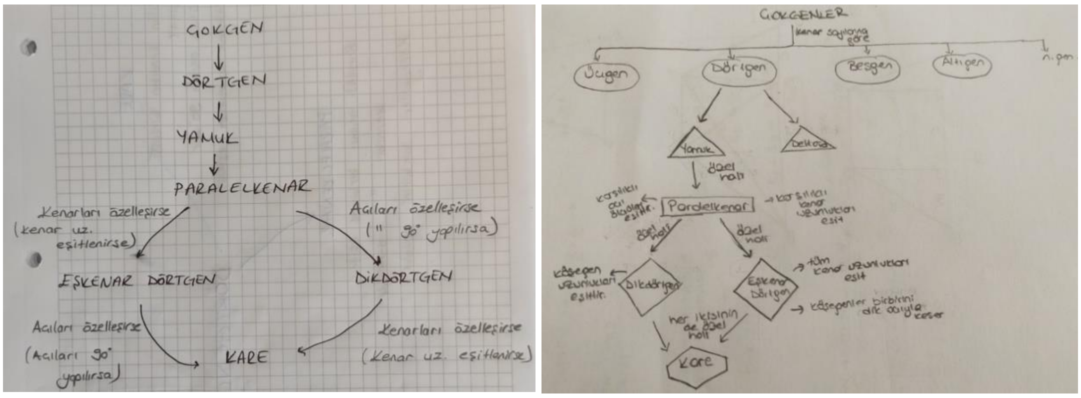


Şekil 4. a) Ö4, b) Ö5, c) Ö7, d) Ö9 öğretmen adaylarının doğruların durumları ve açı çiftlerine ilişkin açıklamaları.

Sunulan örneklerde öğretmen adaylarının yapmış oldukları açıklamalara ve kullandıkları ifadelere bakıldığında doğruların paralellik ve kesişim durumlarına bağlı olarak açıların ölçülerinin eşit olduğu çıkarımında bulundukları görülmektedir. Bu çıkarımların araştırmacı tarafından sorgulanması üzerine öğretmen adayları gerekçelendirmelerde bulunmuşlardır. Ö4, Ö5, Ö7 ve Ö9 kodlu öğretmen adaylarının gerekçelendirmelerine bakıldığında matematiksel sembol ve terminolojiyi doğru şekilde kullandıkları ve geçerli çıkarımlarda bulundukları görülmektedir. Buna dayalı olarak öğretmen adaylarının doğruların birbirine göre durumlarındaki ilişkileri inceleyerek farklı durumlardaki özelliklerine ilişkin informal çıkarımlarda bulunabildikleri ve bu sebeple Ö4, Ö5, Ö7 ve Ö9 kodlu öğretmenlerin VH-3 düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır.

Dörtgenlerin sınıflandırılması etkinliğinde VH-2 düzeyinde yer alan öğretmen adaylarının yanı sıra geometrik şekillerin farklı sınıfları arasında ilişkilendirme yapıp VH-3 düzeyinde yer alan öğretmen adayları da bulunmaktadır. Şekil 5'te Ö1 ve Ö8 kodlu öğretmen adaylarının dörtgenlerin hiyerarşik yapısına ilişkin oluşturdukları şemaları yer almaktadır.

a) b)



Şekil 5. a) Ö1 ve b) Ö8 öğretmen adaylarının dörtgen sınıflandırmaları.

Oluşturulan sınıflandırmalarda Ö1 kodlu öğretmen adayının paralelkenar grubunu, kenar uzunlukları eşit ise->eşkenar dörtgen, eşkenar dörtgeni ise açıları 90^0 olursa->kare olarak sınıflandırdığı ve sınıflar arası ilişkilendirme yaptığı görülmektedir. Aynı zamanda paralelkenar grubunu açı açıları 90^0 olursa->dikdörtgen, dikdörtgeni ise kenarları eşit olursa->kare olarak sınıflandırmıştır. Sınıflar arası ilişkilendirmenin benzer şekilde Ö8 kodlu öğretmen adayı tarafından da yapıldığı görülmektedir. Bu doğrultuda Ö1 ve Ö8 kodlu öğretmen adaylarının dörtgen sınıflarında ve sınıflar arasında ilişkilendirmede bulunabildikleri dolayısıyla VH-3 düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Üçgenlerin sınıflandırılması etkinliğinde ise tüm öğretmen adayları eşkenar üçgenin aynı zamanda ikizkenar üçgen olduğunu, bu üçgenlerde tepe açısından indirilen yüksekliğin, açıortay ve kenarortay olduğunu belirtmişlerdir. Bu doğrultuda tüm öğretmen adaylarının üçgenlerin özellikleri arasındaki ilişkilerin farkında olup çıkarımda bulundukları ve bu sebeple VH-3 düzeyinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır.

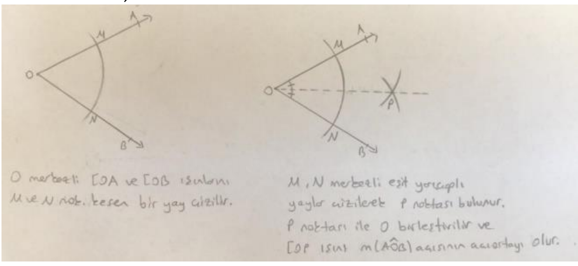
Öğretim etkinliklerinde üçgen ve dörtgenlerde yer alan geometrik şekillerin öğretmen adayları tarafından tanımlanması istenmiştir. Ö1, Ö2 ve Ö9 kodlu öğretmen adaylarının tanımlarında gerek ve yeter koşulları belirttikleri bunun haricinde açıklamaya dayalı ifadelere yer vermedikleri görülmektir. Ö1 kodlu öğretmen adayının üçgen kavramına ilişkin tanımı "*doğrusal olmayan üç noktanın, doğru parçalarının kesişimi ile oluşturduğu şekil*" şeklinde olmuştur. Yamuk kavramını Ö2 kodlu öğretmen adayı "*karşılıklı kenar çiftlerinden en az biri paralel olan dörtgen*" olarak tanımlamıştır. Benzer şekilde Ö9 kodlu öğretmen adayı da "*karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgene paralelkenar denir*" ifadesi ile paralelkenar kavramını tanımlamıştır. Bu doğrultuda Ö1, Ö2 ve Ö9 kodlu öğretmen adaylarının geometrik kavramlara ilişkin tanımlarında gerek ve yeter koşulları belirttikleri ve açıklama yapmayıp tanımlarında ekonomiklik ölçütüne dikkat ettikleri bu sebeple VH-3 düzeyinde oldukları görülmektedir.

VH-4 Düzeyine İlişkin Bulgular

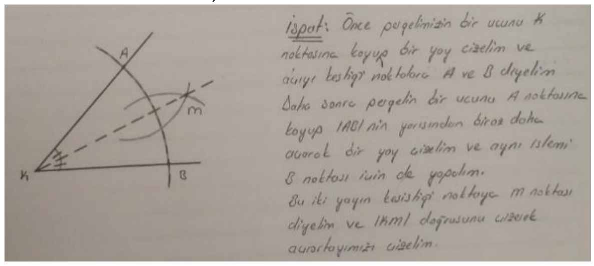
Öğretim etkinliklerinde öğretmen adaylarına ispat yazma uygulamaları öncesi önerme, teorem, postulat ve aksiyom kavramı sunulmuş ve öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkilerin bilgileri ortaya çıkarılmıştır. Önerme ve teorem Ö7 tarafından "*teorem, doğruluğu kanıtlanmış önermelerden oluşur, önermeler ise doğru veya yanlış olabilir doğruluğuna ise ispatla bakılır*" şeklinde tanımlanmıştır. Ö10 kodlu öğretmen adayı ise aksiyomu "*herkes tarafından doğruluğu kabul edilen önermeler*" şeklinde tanımlamış ve Ö3 kodlu öğretmen adayı ise "*mesela Öklid'in aksiyomlarından biri aynı şeye eşit şeyler birbirine eşittir*" şeklinde aksiyomu örneklendirmiştir. Ardından öğretmen adaylarına postulat ve aksiyom kavramlarının benzer/farklı kullanımlarını tartışmaları istenmiştir. Buna yönelik olarak Ö6 kodlu öğretmen adayı postulat ve aksiyom arasındaki farkı "*postulat sadece bir bilim alanında geçerlidir aksiyom ise tüm alanlarda… Mesela Öklid geometrisindeki beş postulat Öklid geometrisinde geçerli*" şeklinde ifade etmiştir. Ö6 kodlu öğretmen adayının açıklamasının ardından öğretmen adaylarının Öklid dışı geometri özelliklerini karşılaştırmaları amacıyla "*Öklid'in postulatlarının tümünü hatırlıyor musunuz? Sizce mantıksal hatanın olduğu durum var mı?*" sorusu yöneltilmiş ve Ö5 tarafından "*5. Postulattı sanırım -paralellik aksiyomu- çelişkili bir durum vardı hatta bundan dolayı Öklid dışı geometrinin çıkışı oluyordu*" şeklinde açıklamada bulunmuştur. Öğretmen adaylarının yaptıkları açıklamalara bakıldığında Ö5, Ö6, Ö7 ve Ö10 kodlu öğretmen adaylarının Öklid geometrisinde önerme, teorem, postulat ve aksiyom kavramları arasındaki ilişkilerin farkında oldukları fakat Öklid dışı geometriyi kavrayamadıkları bu sebeple VH-4 düzeyinde oldukları görülmektedir.

Öğretim etkinliklerinde öğretmen adaylarına çeşitli önermeler sunulmuş ve öğretmen adaylarının bu önermelerin doğruluğunu göstermeleri istenmiştir. İlk olarak doğruların özellikleri konusunda öğretmen adaylarının ispat yaptıkları görülmektedir. Ö4, Ö6, Ö7 ve Ö8 kodlu öğretmen adaylarının geometrik çizimler yolu ile gerçekleştirdikleri ispatları Şekil 6'da sunulmuştur.

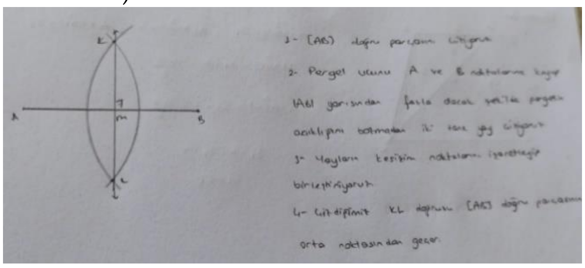
a)



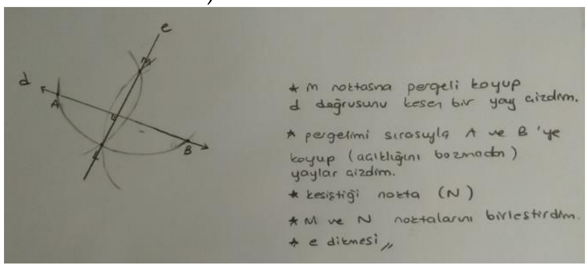
b)



c)



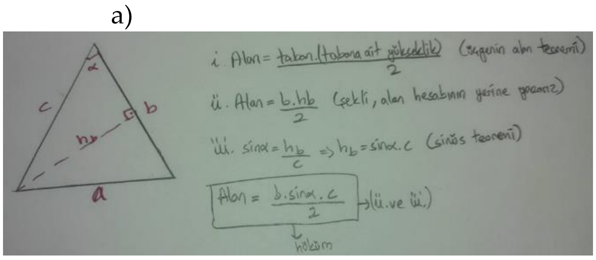
d)



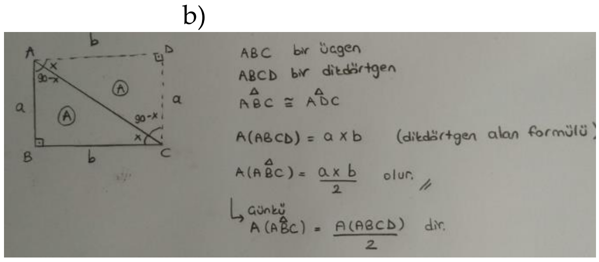
Şekil 6. a) Ö4, b) Ö6, c) Ö7 ve d) Ö8 öğretmen adaylarının doğruların özellikleri konusuna ilişkin çizim yolu ile ispatları.

Ö4 ve Ö8 kodlu öğretmen adaylarının bir açının açıortayını, Ö6 ve Ö7 kodlu öğretmen adayları ise bir doğruya dik bir doğru çizimini ispatladıkları görülmektedir. Buna dayalı olarak öğretmen adaylarının önermelerin doğruluklarının farklı yollarla ispatlanabileceğinin farkında oldukları görülmektedir. Ö6 ve Ö7'nin farklı çizimler yolu ile bir doğruya dik bir doğrunun oluşturulmasını ispatladıkları görülmektedir. Şekil 6'da sunulan öğretmen adaylarının örnek ispat yazımlarının çizimler yolu ile gerçekleştirdikleri görülmektedir. Bunun yanı sıra üçgen konusu öğretim etkinliğinde öğretmen adaylarına "*bir üçgenin alanını kaç farklı yolla bulabilirsiniz? bu yolunuz her zaman geçerli midir? nasıl karar verdiniz?*" soruları yöneltilmiş ve öğretmen adaylarının örnek ispatları Şekil 7'de sunulmuştur.

a)



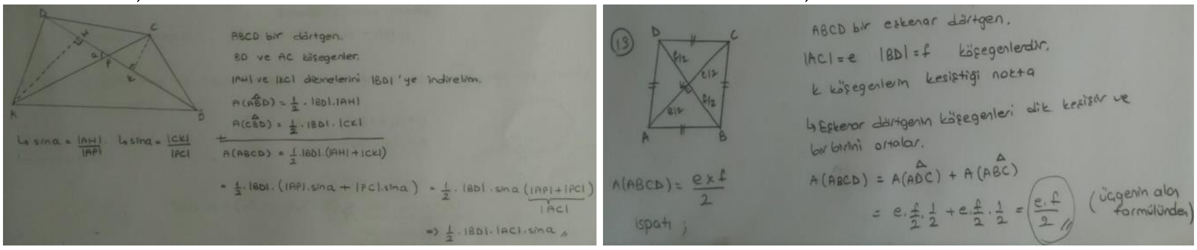
b)



Şekil 7. a) Ö1 ve b) Ö3 öğretmen adaylarının üçgenlerde alan hesaplanmasına ilişkin ispatları.

Şekil 7'de Ö1 ve Ö3 kodlu öğretmen adaylarının üçgenin alan hesaplamasına ilişkin önermeleri ve bu önermelerine ilişkin gerçekleştirdikleri ispatları yer almaktadır. Öğretmen adaylarının ispat yazımlarında gerekçe ve iddialarını belirttikleri görülmektedir. Öğretmen adayları üçgenin alan hesaplamasına ilişkin farkı önermeler sunmuşlar ve farklı ispat yazımı gerçekleştirmişlerdir. Benzer şekilde dörtgenin alan hesaplamasına ilişkin Ö4 ve Ö7 kodlu öğretmen adaylarının gerçekleştirdikleri ispatları Şekil 8'de görülmektedir.

a) b)

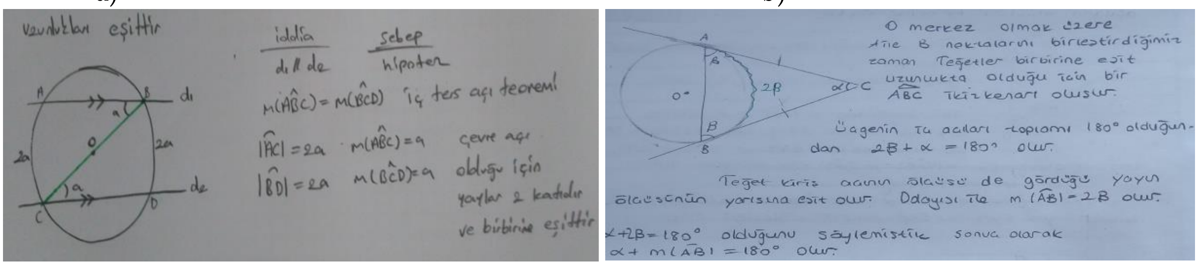


Şekil 8. Dörtgenlerde alan hesaplanmasına ilişkin öğretmen adaylarının ispatları.

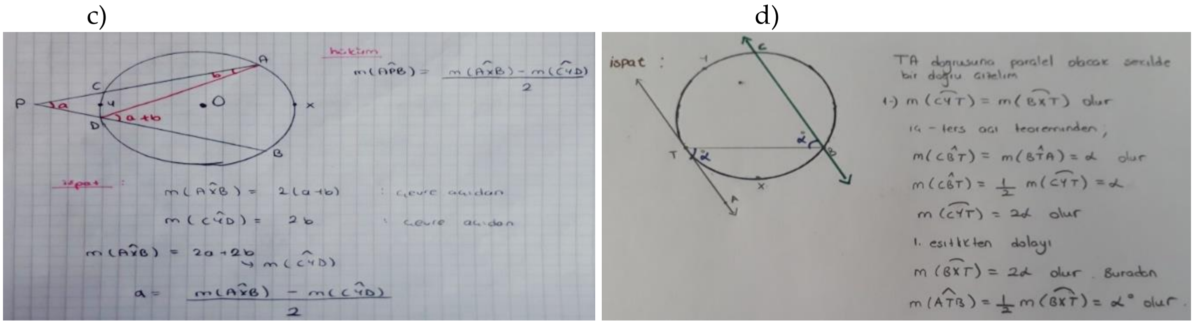
Dörtgenlerin alan hesaplamasında Ö4 düzgün olmayan bir dörtgenin alan hesabını “köşegenlerinin uzunlukları ile bu köşegenlerinin oluşturduğu açının sinüsü ile çarpımına eşittir” önermesinden yola çıkarak ispatlamıştır. Ö7 kodlu öğretmen adayı ise Ö4’ün bu ispatını özelleştirerek bu hesaplamayı eşkenar dörtgen şeklinde ispatlamıştır. Bu sayede öğretmen adaylarının geometrik şekiller ve özelliklerinin çeşitli gruplar ile ilişkilendirebildikleri ve bu ilişkileri ispat yolu ile doğruladıkları görülmektedir.

Öğretmen adaylarının ispatlarını iki kolonlu ve paragraf ispat biçimi olarak yazabildikleri görülmektedir. Örneğin, çember öğretimi etkinliğinde Ö9 kodlu öğretmen adayı “*eşit uzunluktaki kirişlerin ayırdığı çember yayları eşit uzunluktadır*” önermesine ilişkin ispatının iki kolonlu olduğu görülmektedir (Şekil 9). Benzer şekilde çemberde yay-kiriş özelliklerinin ispatında Ö1 kodlu öğretmen adayı iki kolonlu ispat biçimi ile ispatını yazarken Ö4 ve Ö7 kodlu öğretmen adayları paragraf ispat biçimini kullanmışlardır.

a) b)

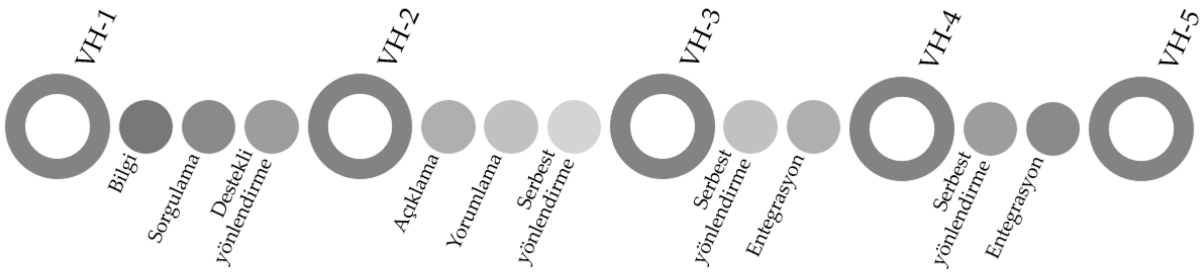


c) d)



Şekil 9. Çemberde teğet-kiriş-yay özelliklerine ilişkin öğretmen adaylarının a) iki kolonlu ispat b) c) d) paragraf ispat biçimi.

VH modeline dayalı öğretim etkinliklerinde sunulan önermelerin doğruluklarının gösteriminde öğretmen adaylarının geçerli ispat yazabildikleri ve bu yazımlarında farklı ispat gösterimlerinden faydalandıkları görülmektedir. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının farklı ispatların birbirlerine denkliğinin farkında oldukları söylenebilir. Bu bulgular doğrultusunda öğretmen adaylarının ispat yazımında VH-4 düzeylerinde oldukları sonucuna ulaşılmaktadır. Tüm VH modeline dayalı öğretim sürecinin genel değerlendirilmesinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişimsel süreci Şekil 10'da sunulmuştur.



Şekil 10. VH modeline dayalı öğretim etkinliklerinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişimsel süreci.

VH modeline dayalı öğretim etkinliklerinde ilk olarak öğretmen adaylarının geometrik şekil ve kavramlara ilişkin bilgileri ortaya çıkarılmış ve sorgulanmıştır. Geometrik şekillerin, üçgenlerin, dörtgenlerin sınıflandırılmasında VH-1 düzeyinde olan öğretmen adaylarının olduğu görülmüştür. Öğretim süreci VH modeline dayalı olarak gerçekleştirilmiş ve öğretim etkinliklerinde destekli yönlendirmede bulunularak öğretmen adaylarının eksik bilgilerinin giderilmesi amacıyla araştırmacı tarafından açıklamalar yapılmıştır. Bu aşamada ise öğretmen adaylarının kavramların tanımlarına dayalı çıkarımda bulunabildikleri ve gerekçelendirme yapabildikleri bu sebeple VH-2 düzeyine geçişlerinin sağlandığı görülmüştür. Öğretmen adaylarına sunulan önermelerin doğruluklarının tartışılmasında ise serbest yönlendirme yapılmış ve bu süreçte öğretmen adaylarının tam olarak ispat yazımı olarak kabul edilmeyen fakat akıl yürütmelerine dayalı mantıksal çıkarımda bulunabildikleri ve bu sebeple VH-3 düzeyinde oldukları görülmüştür. Bu düzeyden sonra öğretmen adaylarının entegrasyon sağlamaları desteklenmiş ve farklı geometri konularında farklı bağlamlarda olan önermeler sunulmuştur. Bu aşamada ise öğretmen adaylarının geçerli ispat yazımı yapabildikleri ve farklı yollarla ispat yazabildikleri görülmüştür (VH-4). Bu bağlamda VH modeline dayalı yapılan öğretim sürecinin öğretmen adaylarının VH düzeyleri arasında geometrik düşüncelerini ve bu doğrultuda ispat yazma becerilerinin gelişimini desteklediği sonucuna ulaşılmaktadır.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışma, VH modeline dayalı öğretimin matematik öğretmeni adaylarının ispat yazma becerilerine ilişkin etkililiğinin ortaya konulması amacıyla gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla öncelikle öğretim deneyi öncesi öğretmen adaylarının ispat yazmada geçerli olan VH düzeyleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının VH modeli öğretim deneyi öncesi çoğunlukla VH-1 ve VH-2 düzeylerinde oldukları, ispata ilişkin sınırlı bilgi sahibi oldukları ve geçerli geometrik ispat yazmada zorlandıkları ortaya konulmuştur. Çalışmada ulaşılan bu sonucun öğretmen adaylarının geometrik ispat yazma konusunda gerçekleştirilen çalışmaların sonuçları ile uyumlu olduğu görülmüştür (Almeida, 2000; Jones, 2000; Knuth, 2002; Moore, 1994; Stylianides ve diğerleri, 2007). Matematik öğretmeni adaylarının öğretim deneyi öncesi VH düzeylerinin ortaya konulmasının ardından çalışmada VH modeline dayalı öğretim deneyi gerçekleştirilmiş ve öğretim deneyinde yer alan etkinliklerde öğretmen adaylarının VH düzeyleri gelişimsel olarak değerlendirilmiştir. Çalışmada, öğretmen adaylarının her zaman en üst VH düzeyinde olmadıklarını gelişimsel bir ilerleme ile üst seviyelere ve hedeflenen tümdengelimli düşünsel anlayışa ulaşabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu değerlendirmeler sonucunda VH modelinin öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişimlerinin VH-4 düzeyine desteklendiğini göstermiştir. VH modelinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerini inceleyen Daguplo (2014), öğretmen adaylarının en üst düzey olan VH-4 ve VH-5 seviyesine ulaşabildiklerini belirtmiştir. Aynı zamanda çalışmadaki bulguları incelendiğinde öğretmen adaylarının her zaman ve her konuda ispat yazma anlamında en üst seviyede olmadıkları görülmektedir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin gelişimlerinin bir süreç olduğu ve VH modelinde yer alan öğretim unsurlarının öğretmen adaylarının geometrik düşünce gelişimini ve bu gelişimin ulaşılan en üst seviyesi olarak ispat yazma becerilerini desteklediği sonucuna ulaşılmaktadır.

Öğretmen adaylarının geometrik ispat yazmadaki düşük performanslarının giderilmesi, ispat yazma becerilerinin geliştirilmesi için ispat yazımı ile ilgili yapılacak farklı öğretim etkinliklerinin ve alıştırmaların kullanılması önerilmektedir (Daguplo, 2014; Sarı Uzun ve Bülbül, 2013). Bu bağlamda öğrencilere sunulan önerme-ispat uygulamaları onların akıl yürütme becerilerini geliştireceğinden geçerli ispat yazma becerilerinin de gelişimini desteklemektedir (Ball ve Bass, 2003; Diezmann, Watters, ve English, 2002). Bu çalışmada etkililiği incelenen VH modelinde öğretmen adaylarının geometrik düşünce gelişimlerinin ve bu gelişimin en ileri aşaması olan ispat yazma becerilerinin gelişiminin sağlandığı sonucuna ulaşılmaktadır. VH modelinde yer alan bilgi ve sorgulama, açıklama ve yorumlama, destekli/serbest yönlendirme ve entegrasyon unsurlarının geometrik düşünce gelişimlerini sağladığı ve öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerini geliştirdiği görülmektedir. Sonuç olarak, öğretmen adaylarının sürekli ispatlamaya maruz kalmalarının ve sürekli ispat etkinliğinde yer almalarının ispat yazma becerilerini geliştirdiği anlamına gelmektedir. Buna bağlı olarak geometri öğretimi VH modeline dayalı bir düzende uygulandığında öğretmen adaylarının tümdengelimli düşünme anlayışlarının desteklendiği görülmektedir. VH modeline dayalı öğretim uygulamalarında matematik öğretmenlerinin geometrik ispat yazmalarını inceleyen Jupri (2018) geometrik ispat problemleri ile uğraşan öğretmenlerin ispat yazma ve problem çözme becerilerinin geliştiğini farklı stratejiler ve ispat yöntemleri ile ispat yazabildiklerini belirtmiştir. Çeşitli araştırmacılarında belirttiği gibi VH düzeylerinde bir seviyeden diğer seviyeye geçiş doğal gelişimin bir sonucu değil kişinin maruz kaldığı deneyimin kalitesine bağlıdır. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının maruz kaldıkları yazılı ispat etkinlikleri onların geometrik ispat yazma kapasitelerini güçlendirmiştir. Benzer şekilde Armah, Cofie, ve Okpoti (2018) öğretmen adaylarının daha yüksek VH düzeylerinde çalışmalarını sağlamak için önermelerin yer aldığı ispat uygulamalarının, öğretmen adaylarının akıl yürütme ve tümdengelimli geometrik ispat yazmalarını desteklediğini belirtmektedir.

Bu çalışma, VH modeline dayalı olarak tasarlanmış ve uygulanmış öğretim etkinliklerinin matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yazma becerilerinde olumlu gelişim sağladığını ortaya koymaktadır. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının geometrik şekillere ve kavramlara ilişkin geometrik düşüncelerinin de katıldıkları bir dizi öğretim etkinliği sonucunda geliştiği görülmektedir. Benzer şekilde Yi ve diğerleri (2020) çalışmalarında VH modeline dayalı öğretim etkinlikleri gerçekleştirmişler ve bu öğretimde matematik öğretmeni adaylarının geometri bilgilerinin gelişimini incelemişlerdir. Çalışmaları sonucunda VH modeline dayalı geometri öğretiminin öğretmen adaylarının geometri alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirdiği sonucuna ulaşmışlardır. Dolayısıyla çalışmada ulaşılan sonuçlar, gerçekleştirilen diğer çalışmaların (Armah ve diğerleri, 2018; Aslan-Tutak ve Adams, 2015; Yılmaz ve Koparan, 2016) sonuçları ile uyumluluk göstermektedir.

Bu çalışmadan ulaşılan sonuçlar doğrultusunda ileride gerçekleştirilecek çalışmalar için aşağıdaki öneriler sunulmuştur.

1. Matematik öğretmeni adaylarının geometri öğretimlerinin yer aldığı dersler içerik ve kapsam açısından revize edilebilir ve bu dersler VH modeline göre yeniden düzenlenebilir.
2. Geometri öğretimi öğretmen adaylarının VH geometrik düşünme gelişimlerini destekleyici olmalıdır. VH modelinde yer alan öğretim sürecine uygun gerçekleştirilecek öğretim uygulamaları ile öğretmen adaylarının tüm geometrik şekillerin özelliklerinin ve aralarındaki ilişkilerin anlaşılması sağlanmalıdır. Bu sayede hedeflenen VH ileri düzeyinde yer alan ispat yazma becerilerinin gelişimine de ulaşılmaktadır.
3. VH modeline dayalı gerçekleştirilecek Öklid ve Öklid dışı geometri öğretimlerinde öğretmen adaylarının ispat yazma becerilerinin daha geniş kapsamlı değerlendirilmesinin sağlanabilmesi için daha fazla çalışma yapılabilir.

KEFAD
http://kefad.ahievran.edu.tr
Ahi Evran University
Journal of Kırşehir Education Faculty
ISSN: 2147 - 1037

ENGLISH VERSION

Introduction

Proof, besides being a requirement for formation, development, and transmission of mathematical knowledge, also forms the basis to understand mathematics (Stylianides, 2007). Wu (1996) argues that anyone who is willing to learn what mathematics is should learn and understand how to write proof. Similarly, Hanna (2000) considered proof as the most important tool in mathematics and claimed that mathematics without proof is not mathematics. In line with these conclusions, the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) included deduction and proof in basic skills of school mathematics. Therefore, proof has become a natural and sustaining part of school mathematics and courses on all levels (Knuth, 2002). Accordingly, proof has also been emphasised as a necessary component of university mathematics curricula.

The basic goal of advanced mathematics and geometry teaching is to gain the students the competency of proof skills (Weber, 2001). Despite proof is in the essence of knowledge of mathematics and geometry, it is observed that pre-service mathematics teachers experience difficulties in understanding the proof and writing the proof (Almeida, 2000; Jones, 2000; Güler et al., 2012; Moore, 1994; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2007) and their proof skills are not at a sufficient level (Jones, 2000; Stylianides et al., 2004). Senk (1985), in her study, asserted that the students are unable to recognise the necessity of deductive proof in proving geometry and they are weak in writing the types of proof. Likewise, Dimakos et al. (2007) suggested the students' difficulties in writing formal proof in geometry. It was concluded that, notwithstanding these shortcomings, the students view proof – an important goal of the geometry curriculum – as trivial and experience difficulties (Dimakos et al., 2007). In this study, it is aimed to examine the development of pre-service mathematics teachers' proof-writing skills in geometry teaching activities by a teaching experiment based on the van Hiele model. Thus, the effficiency of the van Hiele model in pre-service teachers' geometry proof-writing skills shall be asserted and a contribution in this matter shall be made to the literature. For this purpose, the study has sought the answer to the following research question:

1. How efficient is the van Hiele model in pre-service mathematics teachers' geometric proof-writing skills?

Theoretical Framework

Geometric Proof

Geometry analyses shapes and space with a mathematical viewpoint. Geometry is a knowledge structure composed of expressions based on mathematical axioms and justified by proof (Kotzé, 2007). A basic goal of advanced mathematics and geometry teaching is to gain the students the competency of proof skills (Weber, 2001). The importance of teaching geometry and particularly, teaching geometric proof is emphasised in the mathematics curricula of various countries (Ministry of National Education [MoNE], 2018, NCTM, 2000; Shanghai Education Committee, 2004). In school mathematics, geometry supports the students' development of deductive thinking (Howse & Howse, 2014). This support provided by geometric proof enables the students to visualise, understand, and classify geometric concepts (Bell, 1976). Starting from elementary and mid-school, the students' progress in their learning of geometry should be assisted by their mathematics teachers as a preparation for advanced studies. Fuys (1985) suggests that geometry teaching has two main goals for the students' achievements: Developing the skill of deduction and understanding the role deduction plays in mathematics. Learning deduction and proof is important for mathematics, but it is observed that only 30% of the students are capable of proof in geometry subjects involving proof (Clements & Battista, 1992). McCrone and Martin (2004) had shown in their study that the students are placed in lower proof schemes for geometric proof. Similarly, Sevgi and Orman (2020) concluded that 8th-grade students have mid-level proof skills. Consequently, it is observed that the students suffer shortcomings in applying geometric proof. In order to support the students' cognitive development through teaching of geometry, foremost the mathematics teachers and pre-service teachers are required to possess proof-writing skills.

Despite proof forms the very essence of knowing mathematics and geometry, it is observed that the mathematics teachers and pre-service teachers experience difficulties in understanding proof and writing proof (Almeida, 2000; Jones, 2000; Knuth, 2002; Moore, 1994; Stylianides et al., 2007) and their proof skills are not at a sufficient level (Jones, 2000; Stylianides et al., 2004). In a study with 17 teachers with mathematics degrees, Varghese (2008) asked them to write their proof for the expression 'the sum of the measured exterior angles of a polygon is 360^0' (p. 58). Of 14 answers given, only two teachers could write the proof in schematic and verbal form, whereas two teachers could write in symbolic form. Other teachers provided proof by using diagrams, verbally and symbolically, partially correct, and partially wrong. It is seen that, in addition to the teachers' and pre-service teachers' difficulties in applying proof, it is also observed that they have a limited understanding of what proof-writing actually is and they perceive empirical assumptions as valid proof. Goetting (1995) showed that the elementary-school mathematics teachers have a tendency to accept examples and solutions drawn in geometry as proof. Likewise, Knuth (2002) asserted that, for the expression 'the sum of the measured interior angles of any triangle is 180^0'. 5 mathematics teachers maintained that explanations by examples qualify as valid proof. On the other hand, one of the teachers participating in the study mentioned that this is indeed valid proof, but not a formal one. Dickerson (2008) researched the high-school mathematics teachers' conceptions of proof and reported that, since visual proof in geometry does not have sufficient details, it is unacceptable for teachers. In short, the applied studies show that the mathematics teachers and pre-service teachers experience problems with proof-writing. Accordingly, there have been studies supporting elimination of difficulties in geometric proof-writing and development of proof-writing skills and suggestions have been made. Some of these suggestions include giving lessons (Wahlberg, 1997), mitigating the level of abstraction by using examples (Sowder & Harel, 2003), presenting the proofs in the classroom (Freedman, 1983; Reisel, 1982), using diagrams and technologies (Hadas et al., 2000; Mariotti, 2000) and utilising mathematical ambiguities in teaching (Zaslavsky, 2005). Nevertheless, it is required that such suggestions should be included in teaching the geometric proof and their efficiency should be examined.

Van Hiele Model

Since various factors affecting the students' understanding and development of proof and their relevant success are at play, several models on development of the students' knowledge and understanding of proof and development of their proof-writing skills have been developed (Balacheff, 1988; Dreyfus, 1999; Hanna, 2000; Knuth et al., 2002; Marrades & Gutierrez, 2000; Martin & McCrone, 2009; Raman & Weber, 2006; Sowder & Harel, 1998). Of these models, the one that explains the progression of geometric thinking that results in proof is the van Hiele model (Fuys, 1985). Van Hiele (VH) model asserts that geometric deduction and proof are not naturall developed in children, but it should be supported by a series of levels (van Hiele, 1984). VH model describes the students' geometric thinking levels that indicate their development and progression in geometric concepts and a learning process that supports the students' development of geometric thinking. VH model is a tripartite model: (1) It describes five successive and distinct levels that progress as the geometric thinking develops, (2) it identifies the understanding of geometric concepts and (3) it provides guidelines for gradual development in teaching geometry (Wu, 1994). According to the VH model, there are five levels of geometric thinking in an ordered and hierarchical structure. VH-1 (recognition) is the level where the names of the shapes are learned, and they are identified on the basis of their physical appearance. A student on this level conceives, recognises, and names a geometric shape as a whole. The student perceives a whole, without considering properties of geometric concepts, and deduces by the way of visual assessments (Burger and Shaughnessy, 1986). The student has not yet understood the definitions and properties of geometric concepts. For example, a student may recognise that the rectangle is a shape different than the trapezoid but is unable to make detailed deductions based on the shapes' properties. In VH-2 (analysis), geometric shapes are described on the basis of their properties. On this level, the student does not know the definitions of geometric shapes but is able to classify geometric shapes based on diverse basic aspects of their common properties, such as 'all triangles have three sides, and all rectangles have four sides' (Knight, 2006). A student on this level can, for example, list and define properties of all rectangles, but may not yet understand how geometric shapes might be included in diverse classes, such as why a square is a quadrangle or why a rectangle is a rhomboid. VH-3 (abstraction) is the level where geometric shapes are classified on the basis of logical relationships (Burger & Shaughnessy, 1986). Based on a shape's properties, the student is able to establish mutual relationships between one or multiple certain geometric shape classes and to classify them. For example, a student knows that the rectangle is a rhomboid because it has all properties of a rhomboid. VH-4 (deduction) is the level where the importance of deduction is understood and the roles of assumptions, definitions, theorems and proof are understood. It is the level where axiomatic systems are understood and applying proof is enabled. On this level, a student understands the definitions of geometric shapes and terms and makes assumptions. The student is capable of expressing the necessary and sufficient conditions to identify a geometric shape (Hershkowitz et al., 1987). For example, the student is able to make the assumption that to become a quadrangle, it is sufficient for a shape to have four sides, but to qualify as a rhomboid, its sides are required to be equilateral and parallel, and the student can prove this assumption. Finally, on the VH-5 (rigour) level, the axiomatic systems in geometry are fully understood and abstract deduction is enabled (Battista & Clements, 1995). Diverse axiomatic systems such as non-Euclidean geometry are understood, and these systems can be compared. For example, the student can analyse the outcomes of manipulating axioms and definitions. De Villiers (1987) suggests that deduction in geometry is found in VH-3 where logical relationships between the properties of concepts are first established. On the other hand, students on VH-1 and VH-2 see no use in formal proof, because they do not doubt the validity of their empirical observations (Battista & Clements, 1995; de Villiers, 1987; Senk, 1989; van Dormolen, 1977).

VH is an accepted model in assessment of how the students understand geometry (Burger & Shaughnessy 1986; Fuys et al., 1985; Usiskin, 1982). Notwithstanding, certain researchers (Clements et al., 1998; Sarama & Swaminathan, 1997) have argued that the model is not fully inclusive of younger children's geometric perception. Clements and Battista (1992) introduced and included a Level 0 preceding Level 1 in the VH. On the VH-0 (pre-recognition) level, the students can name certain geometric shapes based on their visual properties, but they might confuse geometric shapes placed in the same class and their names (Clements & Battista, 1992). Since this study has pre-service mathematics teachers as its target group, levels (1-5) identified by van Hiele (1984) were taken as the basis.

According to the VH model, the students may be successful in geometric proof-writing, given that they pass all levels in the designated order. In other words, in order to be successful on the (n) level, a student should have achieved success on the (n-1) level (Usiskin, 1982). Therefore, the students should be prepared for the upper level. Progress from one level to the other depends on not age or maturity, but the learning environment the student is in. Hence, the teaching phases in transition of the students from one level to the other in the VH model was described (van Hiele, 1984): (1) knowledge and inquiry, (2) guidance / directed orientation, (3) explicitation and interpretation, (4) free orientation and (5) integration. A teaching plan with long-term implementation, which integrates these teaching components, should be adopted. In the knowledge and inquiry phase, relevant geometric concepts are presented to the students and their knowledge of these concepts is revealed. By inquiring the explanations, the students give on geometric shapes, their explication and reasoning, hence their skills to convince their teachers and classmates are supported. In the phase of guidance or directed orientation, the student discovers implicit properties of geometric shapes. In this phase, the teacher gives supportive tasks to the students and supports the students in recognition of the properties and relationships of new geometric concepts. The student discovers and discusses context-based relationships, and the teacher asks guiding questions: 'What does it become when we fold an equilateral triangle on its diagonal line?' In explicitation and interpretation, the following phase, the students are made to mathematically represent the relationships they had discovered. Van Hiele (1984) asserts that, after the students start to recognise the properties associated with a geometric concept, their use of mathematical language and symbols become more efficient. Accordingly, following the students' discoveries, the teacher should make room for mathematical language and terminology: 'Let's discuss what the shapes and properties mean. Diagonals are on symmetrical lines. There are two symmetrical lines, and the opposite angles are equal. A diagonal divides an apex angle into two'. Following this phase, the students are expected to study independently on more complex duties. The students have become more versed in relationships of geometric concepts, but in certain situations, they require assistance for identifying complex structures. The teacher's support for these activities is more open-ended. For example, the teacher may say the following: 'How can you form an equilateral triangle only two sides of which are given?' In this phase, the teacher provides a more open-ended orientation to allow the students make their studies independently. The final phase in the teaching process is integration. This phase aims at the students' use and structuring of their gained knowledge in diverse contexts, not at teaching new knowledge. According to the VH model, learning opportunities, examples, and practices presented in the student's learning environment are important components of supporting the progress. First, the learners' geometric level on the VH model should be identified, and the learning experience should be enriched with compatible geometry teaching (Clements, 2003). In this study made to this end, it was targeted to improve the proof-writing skills of mathematics pre-service teachers in geometry subjects and to have them acquire efficient teaching. This study will contribute to arrangement of geometry learning environments that are effective in the mathematics pre-service teachers' development of proof-writing skills.

Methodology

The study was designed as qualitative research. Qualitative research enables in-depth examination of various phenomena and situations and their assessment with a holistic approach (Fraenkel & Wallen, 2009). Since the study aims at revealing the VH model's effectiveness on mathematics pre-service teachers' geometric proof-writing skills, the teaching experiment – a qualitative method – was adopted.

Teaching experiment involves the researcher's/teacher's implementation of teaching activities planned under a learning objective (Cobb, 2000). Teaching experiment, as a developmental form of research, is implemented by applying an intervention. For this end, there are various teaching events and clinical interviews applied under a teaching experiment (Yackel et al., 2015). In this method, 'teaching activities' prepared, planned and developed – in line with a designated learning objective – by researchers are included and their application is 'experimented' by the planned participants. The researcher and the participants have a long-term interaction during the implementation procedure. Data in a teaching experiment are usually qualitative and records of the teaching applications, clinical interviews, observations, reflective diaries, and worksheets constitute the qualitative data (Cobb, 2000). Subsequent to collection of qualitative data, teaching activities are analysed to assess their efficiency in supporting the students' learning objectives. Teaching experiment involves a repetitive process. Teaching activities are applied, analysed, and developed for improved achievement of the learning targets. Following completion of the teaching experiment, all data collected during the experiment are analysed retrospectively. In this study, by developing and implementing VH-model learning activities in geometry and analysing the pre-service teachers' proof-writing skills, an assessment of the VH model's effectiveness shall be enabled (Figure 1).

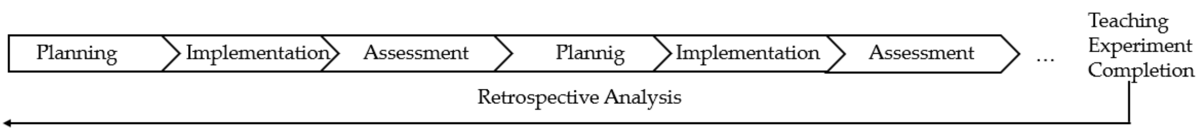


Figure 1. Teaching experiment model implemented in this study

Participants

The study was conducted with first-grade students studying in the elementary-school mathematics teaching programme of a state university. For this purpose, 10 persons from 57 pre-service mathematics teachers were included in the study. Purposeful sampling was used in inclusion of the pre-service teachers in the study. Voluntary participation and their diverse VH levels were designated as the inclusion criteria. A questionnaire composed of 10 geometric proof questions was applied by the researchers to identify the pre-service teachers' VH levels. On assessment of the answers given by the pre-service teachers, the ones that were considered to have difficulties in geometric proof or have made erroneous proof or thought that exemplification instead of proof makes valid proof were included in the study. Therefore, participation of pre-service teachers on VH-0 and VH-1 levels of geometric proof in the study was assured. For privacy of the participating pre-service teachers, they were encoded as P1, P2,…,P10.

Pre-service teachers participating in the study are studying in the first grade. They have completed the first academic term of the mathematics teaching programme and they took the major area courses Foundations of Mathematics-I and Calculus-I. Under these courses, the pre-service teachers gained knowledge on proof in mathematics and the types of proof and further, they had practically made proof. In the second term, where this study is conducted, the pre-service teachers are studying the major area courses of Foundations of Mathematics-II, Calculus-II and Abstract Mathematics. These courses intensively have practical proof. Moreover, the course Foundations of Mathematics-II included teaching of geometric concepts and the pre-service teachers have knowledge on geometric concepts and definitions.

Van Hiele Model Teaching Contents

Based on the VH model, the researchers had developed teaching contents to enable the pre-service teachers' improvement of geometric thinking and consequently, by developing their proof-writing skills and to have them rank on the advanced levels of the VH model. The teaching contents planned were implemented with the pre-service teachers on a schedule of 2 hours a week, during out-of-school time. These teaching activities are presented in the Table 1.

Table 1. *Teaching contents and the time schedule based on the VH model*

Week	Teaching activity contents
1	Activity-1: Naming geometric shapes At this activity, the pre-service teachers study naming and describing geometric shapes and verifying their properties. Afterwards, the shapes are classified through class discussions. Activity-2: Naming basic geometric shapes At this activity, defined and non-defined concepts are presented and afterwards, definitions and explanations on Euclidean postulates are made.
2	Activity-3: Lines' relative conditions and the properties of angles At this activity, proof of propositions concerning the lines' conditions and the properties of angles is made. In these proofs, the pre-service teachers are first guided in proof-writing by basic geometric drawings and afterwards, free orientation for presenting their proper explanations and justifications is provided.
3	Activity-4: Defining and classifying triangles' properties At this activity, angle and side properties of triangles are defined and associated classifications are made.
4	Activity-5: Defining and associating the triangles' auxiliary components Pre-service teachers define and prove bisector, median and height properties of triangles.

5	Activity-6: Defining and associating the triangles' area properties Proof of propositions concerning area relations in triangles is made. Associations (with rectangle and circle) are made to find the relations.
6	Activity-7: Defining and classifying the polygons' corner, side and angular properties and making logical associations At this activity, proof of polygons' properties and associated classification of geometric shapes are made. Afterwards, proof of propositions concerning angular properties of convex and concave quadrangles is given.
7	Activity-8 & 9: Defining and classifying the quadrangles' corner, side and angular properties and making logical associations and proof At this activity, the pre-service teachers define properties of each quadrangle, make associations between their properties, classify them (with a subset) and prove their deduction.
8	Activity-10 & 11: Explaining the circle's properties At this teaching activity, chord, tangent, and arc properties of the circle are defined and proven by the pre-service teachers. Afterwards, proof of propositions concerning angular conditions associated with these properties is made.

Planning of the teaching activities was based on the VH model levels and the learning environment components described by Van Hiele (1984). These are (1) knowledge and inquiry, (2) guidance / directed orientation, (3) explication / interpretation, (4) free orientation and (5) integration. The teaching activities planned on the basis of these components and VH levels contain teaching of two-dimensional (2D) geometric shapes. The activities were aimed at individual studies of the pre-service teachers and to this end; individual worksheets on geometry subjects were developed. Following the pre-service teachers' individual studies, an assessment of their proofs was made with class discussions.

Under the teaching activities, first, activities on the pre-service teachers' status of defining, analysing, and verifying common properties of 2D geometric shapes were implemented. Subsequent to this activity, to enable the pre-service teachers' development of thinking on their respective VH levels, propositions on lines, angle, triangle, quadrangle and circle subjects were presented. In proving the propositions presented in these subjects, through guided discussions, the pre-service teachers were made to ask questions and try to convince each other and to present their justifications. Afterwards, through free orientation, the pre-service teachers were made to use their acquired proof-writing skills in different propositions.

Data Collection

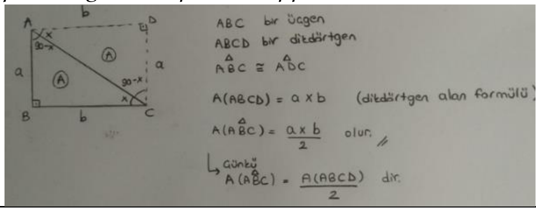
Data collection tools in the study are individual interviews pirior to the teaching experiment, audio and video recordings of class activities implemented during the teaching experiment, the researcher field notes and individual worksheets of the pre-service teachers. Clements (2003) argued that, prior to implementing the VH model, the geometric levels of the students should be identified and a geometry teaching compatible with these levels should be provided. Accordingly, individual interviews were carried out the pre-service teachers at their inclusion in the study. The purpose of these interviews had been to identify the pre-service teachers' VH levels prior to the teaching experiment. To serve this end, the researchers developed a proof questionnaire comprised of 10 questions that require geometric proof. The questions included in the study represented exemplary situations such as 'classify the given geometric shapes and justify' and 'measurements of the internal reverse angle pairs two parallel lines have with a secant are equal; justify.' Expert opinions were taken to assess the scope validity and intelligibility of the questions included and the questionnaire was thus finalised. Subsequent to individual interviews with the pre-service teachers, their VH levels prior to the teaching experiment were identified.

At implementation of the 8-week class studies based on the VH model, the pre-service teachers' individual studies were recorded on worksheets, whereas class practices were recorded on audio and video. Furthermore, the researcher had taken simultaneous field notes as an observer. Worksheets relating to each geometry subject were developed by researchers. Worksheets contained propositions on geometry subjects. Afterwards, expert opinion on the worksheet propositions' compatibility with the scope and levels was taken and they were re-arranged. At the teaching activities, the objective had been to have the pre-service teachers individually prove the relevant proposition on their worksheet and then, make explanations and justifications through class discussions and reach a generalisation. Class discussions held by the pre-service teachers were recorded on audio and video entirely.

Data Analysis

In the study, the qualitative data were analysed on the basis of geometric thinking development levels described by Van Hiele (1984). Analysing the data in this way, under predesignated themes is termed as descriptive analysis (Yıldırım & Şimşek, 2016). Individual interviews, audio and video recordings, the pre-service teachers' worksheets and the researcher field notes constitute the qualitative data of the study. Audio recordings from individual interviews held prior to the teaching experiment were redacted and filed separately for each pre-service teacher. Notes and audio and video recordings taken at teaching activities were redacted for each teaching activity and filed. VH levels identified by Van Hiele (1984) had formed the thematic framework for analysis. Hence, categories of encoding were designated. On the basis of remarks made in the literature on VH levels (Daguplo, 2014; van Hiele, 1984; Senk, 1985), the researchers had made independent encoding. Encoding was applied consequent to comparison and verification of data obtained from diverse data sources. The exemplary encoding for the procedure is presented in the Table 2. Following such independent encoding, the researchers met and mutually presented the codes they had developed and their justifications. Following an assessment of the codes, categories compliant with VH levels in the developed thematic framework were shaped.

Table 2. *Analysis chart and exemplary encoding*

Level	Encoding
VH-1	*P3: We can say that it resembles the shape rectangle.*
VH-2	P4: *If any sort of quadrangle meets a certain property, we place it in the associated class. For example, if it meets the properties of a rhomboid, we classify it so.*
VH-3	P9: *A quadrangle with parallel opposite sides is named a rhomboid.*
VH-4	P7: 

Validity and Reliability

Validity of this study was ensured by purposeful sampling, data variation, expert opinion, and a detailed presentation of the teaching experiment. In this study that is qualitative research, since joint use of diverse data collection tools – interview, observation, and documents (pre-service teachers' worksheets and researcher field notes) – allows verifiability of obtained data, credibility was provided. In qualitative research, transferability is provided by detailed presentation of the participants' characteristics and the application contents (Yıldırım & Şimşek, 2016). In this study, transferability was assured by a detailed presentation of the pre-service teachers' characteristics and their past experiences and of the teaching experiment contents. Thus, the study's adaptability to similar studies was assured. Data were encoded independently by two researchers for consistency and at a subsequent meeting, a consensus was reached, and the themes were shaped. This had aimed at ensuring consistency and reliability of the study.

Ethical Approval for the Study

This study complies with all rules stipulated under the 'Directive on the Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics.' None of the actions listed in the second section of the Directive, namely the 'Actions in Breach of Scientific Research and Publication Ethics,' were conducted.

Ethics committee approval details:

Committee of ethical assessment: Yozgat Bozok University

Date of the ethical assessment decision: 20 January 2021

Ethical assessment document reference number: 3198

Findings

The findings of the study were assessed in two phases of the pre-service teachers' proof-writing skills: (1) prior to the teaching experiment and (2) during the VH-model teaching activities. Before the teaching activities, the pre-service teachers' proof-writing skills were assessed under VH levels, and the results were presented in the Table 3.

Table 3. *Pre-service teachers' proof-writing levels prior to the teaching activities*

Level	Participant
VH-1	P1, P2, P3, P5
VH-2	P4, P7, P8, P9
VH-3	P6, P10

An examination of the findings presented in the Table 3 reveals that the pre-service teachers' proof-writing skills usually rank on the VH-1 (n=4) and VH-2 (n=4) levels. At individual interviews organised prior to the teaching activities, the pre-service teachers were asked questions that aim at valid geometric proof-writing. One of the questions asked to the pre-service teachers was '*can there be a triangle with two right angles?*' To this question, P2 gave the explanation "*no, because if it does, interior angles of the triangle shall have a sum more than 180^0.*' Likewise, P5 answered "*since the interior angles of a triangle has the sum of 180^0 degrees, no.*' Explanations by the quoted pre-service teachers show that they are unable to make valid proof, and they only assert the property of a triangle's interior angles. Accordingly, it is concluded that, prior to the learning activities, the pre-service teachers' geometric thinking development was on a low level and hence, they were weak in valid proof-writing. Nevertheless, it was observed that pre-service teachers P6 and P10 were on the level of deduction / logical deduction. To the same interview question, P6 gave the following explanation:

> When we draw a circumcircle passing through the corners of a triangle, the angles of that triangle become inscribed angles. Arc lengths opposed by these angles measure twice the angle. We know that a circular arc measures 3600 and hence, intersection of three points with the line indicating a triangle, we may say that there can't be.'

Accordingly, it is concluded that these two pre-service teachers rank on the first accepted level of valid proof-writing. When the pre-service teachers' proof-writing skills prior to the teaching activities are assessed generally, it is concluded that the pre-service teachers have insufficient proof-writing skills, they have difficulties in proof-writing, and they have limited understanding.

Exemplary practices found in the VH-model teaching experiment procedure aiming at development of the pre-service teachers' proof-writing skills and the pre-service teachers' proof-writing levels are presented below.

Findings on the VH-1 Level

At the teaching activities under this study, the pre-service teachers were asked to describe, explain and classify various geometric concepts. These practices were implemented on the basis of the VH model's knowledge and inquiry phase. Accordingly, the pre-service teachers were first asked to examine the geometric shapes (Figure 2) and then, name and classify them. The exemplary explanations given by the pre-service teachers on the geometric shapes are given below.

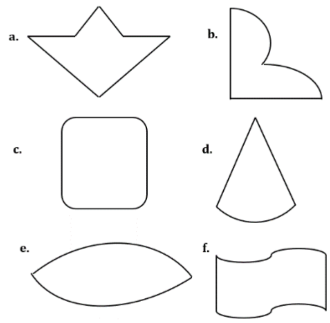


Figure 2. Exemplary geometric shapes used at the teaching activity.

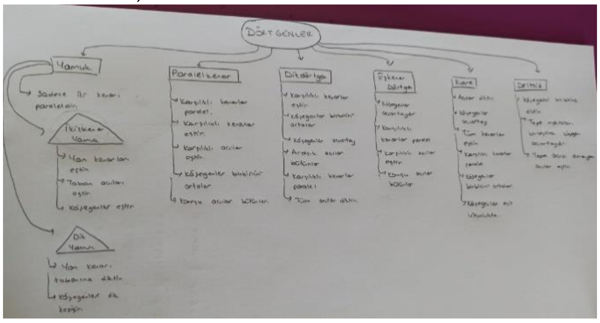
At the activity of describing, explaining, and classifying the geometric shapes' properties, the pre-service teachers' knowledge was questioned. In this process, P2 gave the following answer: '*I'm not sure if we can call these shapes geometric shapes. The shape c resembles a rectangle, but I think the rest are not geometric shapes.*' P3's explanation was as follows: '*Moving from this logic, we can say that the shape d resembles a triangle, b resembles a right triangle and f resembles a rectangle, but these are not the geometric shapes we know of.*' It is observed that the pre-service teachers Code P2 and P3 had described the properties based on the geometric shapes' appearances and given their insufficient deduction; they are placed on the VH-1 level. Accordingly, the pre-service teachers are unaware of the geometric shapes' properties and therefore, they cannot establish a cause-and-effect relationship and in their explanations, they are unable to make justifications. Based on these results, it may be argued P2 and P3 have limited deduction skills in classification of geometric shapes.

Findings on the VH-2 Level

Pre-service teachers' knowledge on geometric shapes and concepts were revealed during the teaching activities process and their knowledge was questioned. In this process, the pre-service teachers were guided with directed questions and when considered necessary, explanations were given. It was observed that some pre-service teachers made classifications merely on the geometric shapes' properties, without knowing the geometric shapes' definitions. At the activity of classifying geometric shapes, P1 made the following remarks on the shapes given in the presented visual (Figure 2): '*They don't look like the geometric shapes we know. We classify the known geometric shapes on how many sides they have: Triangle, quadrangle, pentagon, and the like. But these don't really have sides.*' Similarly, pre-service teacher code P5 gave the explanation '*a notwithstanding, these shapes don't have straight sides.*' P1 and P5's comments show that they brought explanations by focussing on the geometric shapes' properties and not their definitions and made classifications accordingly. Therefore, it was concluded that pre-service teachers Code P1 and P5 were on the VH-2 level in classifying geometric shapes.

At the activity of classifying triangles, it was observed that the pre-service teachers Code P4 and P10 made classifications based on the geometric shapes' properties in developing a hierarchical order of quadrangles (Figure 3).

a)



b)

Figure 3. Quadrangle classifications of pre-service teachers a) P4 and b) P10.

At the activity implemented on the hierarchical structure of quadrangles, it was observed that pre-service teachers Code P4 and P10 listed the geometric shapes' properties in a detailed way and made classifications based on these properties. As seen in the Figure 3, pre-service teachers Code P4 and P10 had classified the quadrangles in classes of rhombus, trapezoid etc., but they failed to establish relations between the classes. When the pre-service teachers' classifications were questioned, P4 brought the explanation *'if any sort of quadrangle meets a certain property, we place it in the associated class. For example, if it meets the properties of a rhomboid, we classify it so.'* In the activity's progression, pre-service teachers were asked whether there is a relation between a rhombus and a deltoid. P3 gave the following answer: *'A deltoid is a specific quadrangle, but it has no relation to a rhombus.'* Similarly, the pre-service teacher code P7 also failed to establish any relation and answered *'a rhombus is the most specific quadrangle, whereas a deltoid has different properties; it seems that they have no relation.'* Accordingly, it is concluded that the pre-service teachers were able to classify the quadrangles, but they failed to view different shapes as parts of different classes. Therefore, the conclusion that pre-service teachers Code P3, P4, P7 and P10 rank on the VH-2 level in establishing the hierarchical structure of the quadrangles was reached. At the activity where the participants were asked to define the quadrangles, it was observed that the definitions made by the pre-service teachers failed to meet the criterion of economy that refers to the necessary and sufficient conditions and instead, they were composed of explanations reiterating the shapes' properties. For example, pre-service teacher code P6's definition of a rhomboid was '*four sides and with parallel and equal opposite sides and the sum of its interior angles is 360^0.*' Similarly, in the definition of a square, pre-service teacher code P2 made the following remarks: "*four sides and they're equal, with parallel opposite sides and all of its angles are equal and measured 90^0.'* Accordingly, it is observed that, in definition of geometric concepts, pre-service teacher codes P2 and P6 referred to an excessive number of properties – that is, more than necessary – and therefeore placed on the VH-2 level.

Findings on the VH-3 Level

In the activity where knowledge of geometric concepts was questioned, pre-service teachers on the VH-2 level (P2 and P5), as well as pre-service teachers who made deductions on definition of geometric shapes and thus ranked on the VH-3 level had participated. On the classification of geometric shapes presented in the Figure 2, pre-service teacher Code P5 made the following explanation:

> 'They are composed of points and intersections of these points with the line segments. Depending on how many sides they have, they're named as triangle, quadrangle, and pentagon and so on. Here, I defined a polygon. Per definition, we can say that only the shape a is a polygon. Even, to further specify, we can call it a concave polygon.'

On the other hand, pre-service teacher Code P7 said '*yes, other shapes are composed of curves, and these are simple curves'* and following this explanation, pre-service teacher Code P10 based its argument on the definition *'shape a is a polygon, but we can't classify the others'* and both made deductions on classification of geometric shapes. Accordingly, it is concluded that pre-service teachers Code P5, P7 and P10 made comparisons and deductions, on the basis of polygon, concave/convex and curve properties, concerning the properties of the shapes presented in the visual and therefore, was placed on the VH-3 level in naming and classifying geometric shapes.

At the activity where the lines' relative conditions and the angles' properties were studied, the pre-service teachers were asked to examine the lines' relative conditions and accordingly, the properties of measured angles. In this activity, equality of the angle pairs depicted on the lines was questioned and free orientation through questions such as 'what happens if the lines intersect?' or 'does a varied position in the lines' parallel condition cause a change in equality of the angles?' Figure 4 represents the exemplary deductions made by pre-service teachers Code P4, P5, P7 and P9.

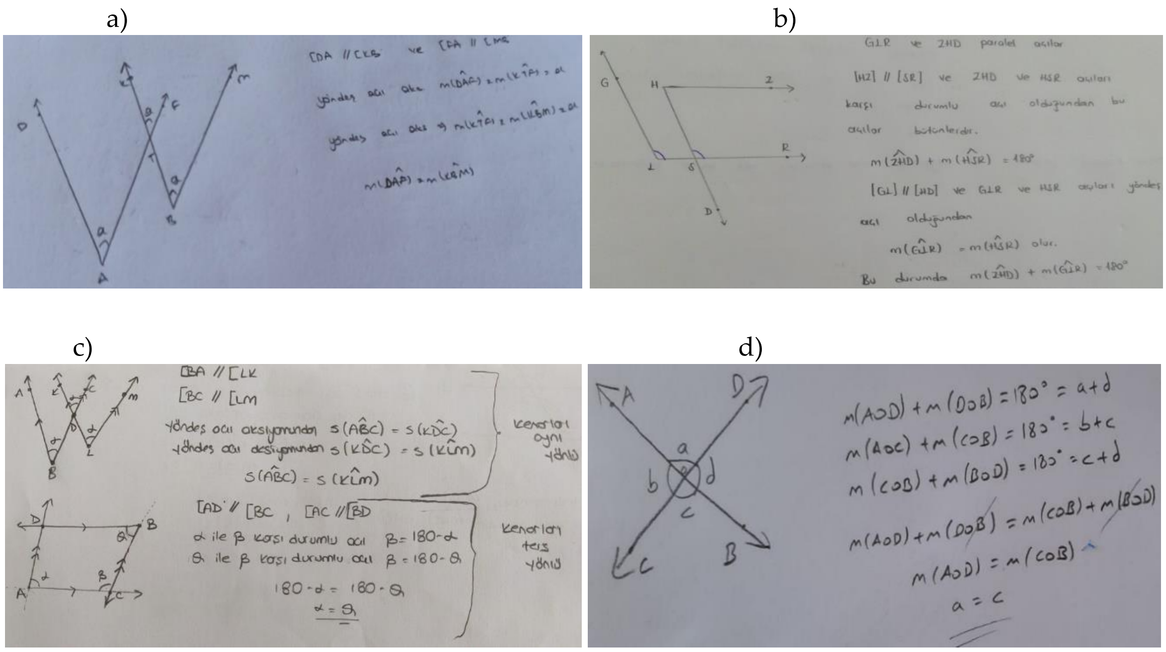


Figure 4. Explanations on the lines' condition and angle pairs by pre-service teachers a) P4, b) P5, c) P7 and d) P9.

In the given examples, it is observed that explanations made, and expressions used by pre-service teachers refer to their deduction that measured angles are equal in relation to the lines' parallel and intersectional conditions. When the researcher questioned these deductions, the pre-service teachers made justifications. An examination of justifications by pre-service teachers Code P4, P5, P7 and P9 reveals that they had used mathematical symbols and terminology accurately and made valid deductions. Accordingly, it is concluded that the pre-service teachers are able to examine the relations of the lines' relative conditions and make informal deductions for properties under different conditions and therefore, pre-service teachers Code P4, P5, P7 and P9 are placed on the VH-3 level.

In the activity where quadrangles were classified, pre-service teachers on the VH-2 level, as well as pre-service teachers who established relationships between different classes of geometric shapes and thus ranked on the VH-3 level had participated. Figure 5 represents the charts developed by pre-service teachers Code P1 and P8 on the hierarchical structure of quadrangles.

a) b)

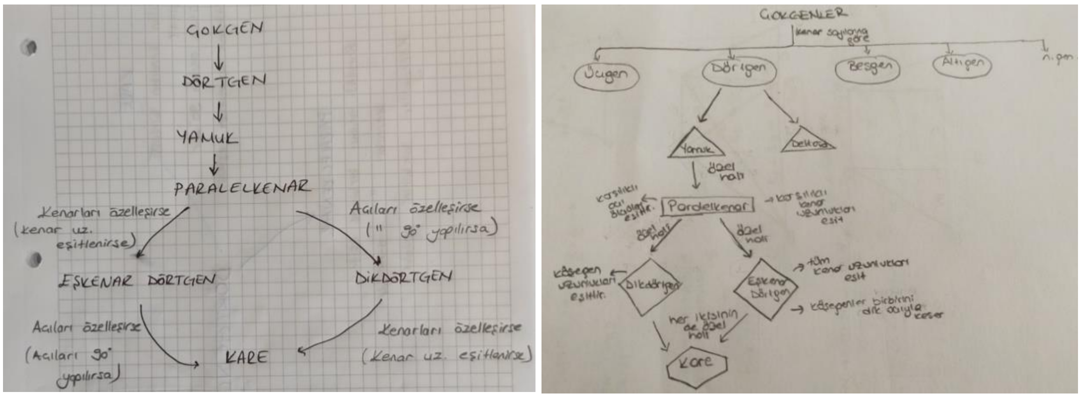


Figure 5. Quadrangle classifications of pre-service teachers a) P1 and b) P8.

The classifications developed show that pre-service teacher Code P1 classified the rhomboid group on the basis of 'equal side lengths->rhomboid' and the rhomboid on the basis of 'measured angles 90^0->square' and established relationships between the classes. Additionally, P1 classified the rhomboid group on the basis of 'measured angles 90^0->rectangle' and the rectangle on the basis of 'equal side lengths->square.' It is observed that a similar association between classes was made by pre-service teacher code P8. Accordingly, it is concluded that pre-service teachers Code P1 and P8 were able to make associations within and between quadrangle classes and therefore, they are ranked on the VH-3 level. On the other hand, in the activity of classifying the triangles, all pre-service teachers indicated that each equilateral triangle is also an isosceles and, in these triangles, the height drawn from the apex angle is a bisector and median. Accordingly, it is concluded that all pre-service teachers are aware of the relations between the properties of an angle and thus made deductions and therefore, were ranked on the VH-3 level.

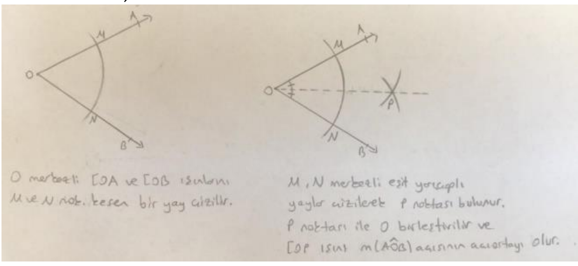
At the teaching activities, the pre-service teachers were asked to define the geometric shapes placed amongst triangles and rectangles. It is seen that pre-service teachers Code P1, P2 and P9 presented necessary and sufficient conditions in their definitions but otherwise, they did not include any expressions based on explication. Pre-service teacher code P1's definition of the concept of a triangle had been '*the shape formed by intersection of three non-linear points with line segments.*' Pre-service teacher code P2 defined the concept of a trapezoid as '*a quadrangle at least one of its opposite side pairs are parallel.*' Similarly, pre-service teacher code P9 made a definition of the rhomboid by the expression *'a rectangle that has its opposite sides parallel to each other is called a rhomboid.'* Accordingly, it is concluded that pre-service teachers code P1, P2 and P9 had met the necessary and sufficient conditions in their definitions of geometric concepts and by not giving any explanations, had taken heed of the economy criterion and hence, they are placed on the VH-3 level.

Findings on the VH-4 Level

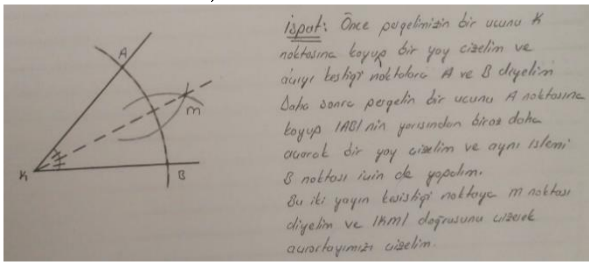
Prior to the proof-writing practices under the teaching activities, the pre-service teachers were provided with the concepts of proposition, theorem, postulate and axiom and the pre-service teachers' knowledge of these concepts was identified. P7 described proposition and theorem with the following remarks: '*A theorem is composed of propositions whose correctness is proven, whereas propositions may be correct or incorrect and their correctness is verified by proof.*' Pre-service teacher Code P10 axiom as 'a proposition whose correctness is agreed by everyone' and Pre-service teacher Code P3 gave an example to axiom as follows: "*for example, one of the Euclidean axioms is that things that are equal to the same thing are equal.*' Afterwards, the pre-service teachers were asked to discuss similar/different uses of the concepts postulate and axiom. For this purpose, pre-service teacher Code P6 described the difference between a postulate and an axiom as follows: '*A postulate is valid only in the scientific field, but an axiom, it is valid in any field… For example, the five postulates of the Euclidean geometry are valid in the Euclidean geometry.*' Following pre-service teacher Code P6's explanation, to have the pre-service teachers compare properties of non-Euclidean geometry, the question *'do you remember all of Euclidean postulates? Do you think they have something logically erroneous?'* and P5 answered '*I guess it was the fifth postulate, the parallel axiom, and it had something contradictory and therefore, it became the departure point for the non-Euclidean geometry.*' An observation of the pre-service teachers' explanations suggests that pre-service teachers Code P5, P6, P7 and P10 are aware of the relations between the concepts of proposition, theorem, postulate, and axiom in the Euclidean geometry, but since they do not understand the non-Euclidean geometry, they are placed on the VH-4 level.

At the teaching activities, the pre-service teachers were given various propositions and the pre-service teachers were asked to show the correctness of these propositions. Pre-service teachers were seen to have first made proof on the lines' properties. Proofs made by pre-service teachers Code P4, P6, P7 and P8 through geometric drawings are represented in the Figure 6.

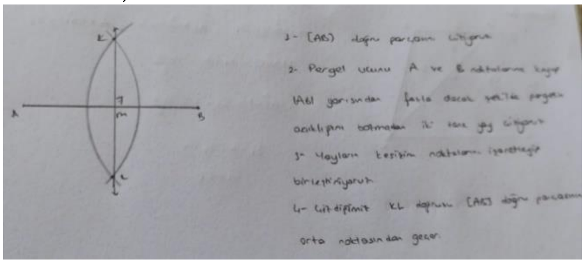
a)



b)



c)



d)

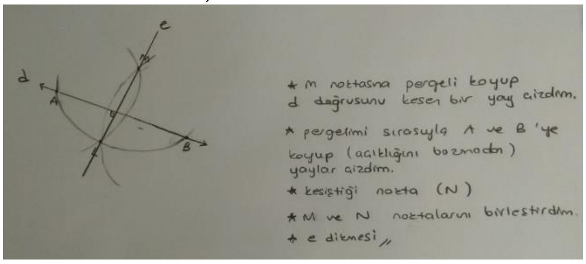
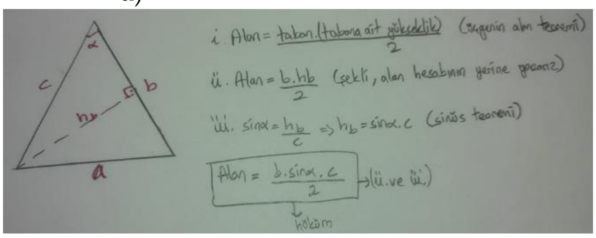


Figure 6. Proofs through drawing on the lines' properties made by pre-service teachers a) P4, b) P6, c) P7 and d) P8.

It is observed that pre-service teachers Code P4 and P8 had proven the bisector of an angle, whereas pre-service teachers Code P6 and P7 had proven drawing a line rectangle to a line. Accordingly, it is concluded that the pre-service teachers are aware of the option to prove the correctness of propositions by various means. It is observed that the proof of a line rectangle to a line by P6 and P7 was made through different drawings. It is to be noted that the pre-service teachers' exemplary proof-writing given in the Figure 6 was made through drawings. Furthermore, at the teaching activity with the subject of triangles, the pre-service teachers were asked the questions '*how many ways can you use to find the area of a triangle? Is that method always valid? How did you decide?*' Pre-service teachers' exemplary proofs are given in the Figure 7.

a)



b)

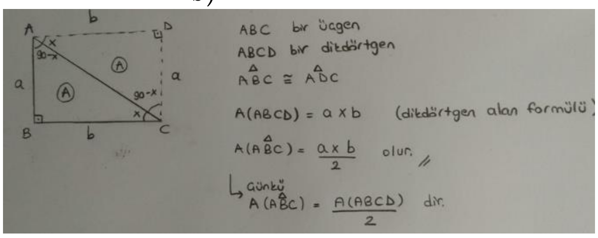


Figure 7. Triangle area calculation proofs by pre-service teachers a) P1 and b) P3.

Figure 7 features pre-service teachers Code P1 and P3's propositions on calculating a triangle's area and their proofs relevant to these propositions. It is observed that the pre-service teachers indicated justification and claims in their proof-writing. Pre-service teachers had presented different propositions on calculating a triangle's area and applied different proof-writing. Similarly, pre-service teachers Code P4 and P7's proofs on calculating a quadrangle's area are seen in the Figure 8.

a) b)

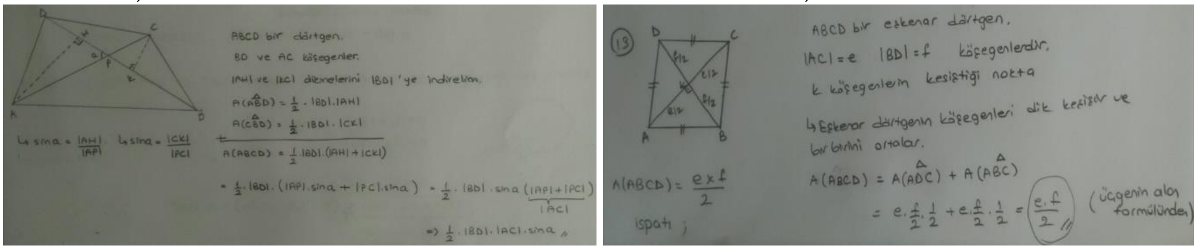
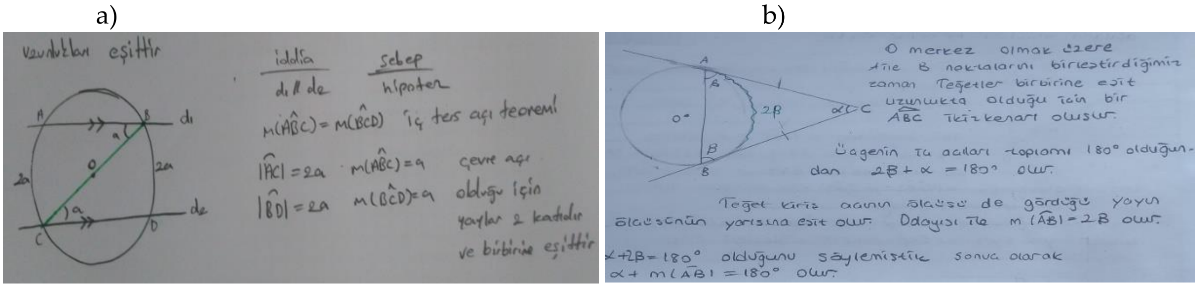


Figure 8. Pre-service teachers' proofs on calculating the area in quadrangles.

At calculating the quadrangles' area, P4 presented the proof for calculation of an irregular quadrangle based on the proposition that 'it is equal to the product of its diagonals multiplied by the sinüs of the angle formed by these diagonals.' On the other hand, pre-service teacher Code P7 further specialised this proof of P4 and had proven this calculation in the form of a rhombus. Therefore, it is observed that the pre-service teachers are able to associate geometric shapes and their properties with various groups and to verify such associations through proof.

It is observed that the pre-service teachers are able to write their proofs in the two-column and paragraph proof forms. For example, at the circle teaching activity, it is seen that pre-service teacher Code P9's proof to the proposition '*circular arcs divided by chords of equal length are of equal length*' is a two-column proof (Figure 9). Likewise, in proof of the arc-chord properties, pre-service teacher Code P1 used two-column proof-writing, whereas pre-service teacher Code P4 and P7 used the paragraph form of proof-writing.

a) b)



c) d)

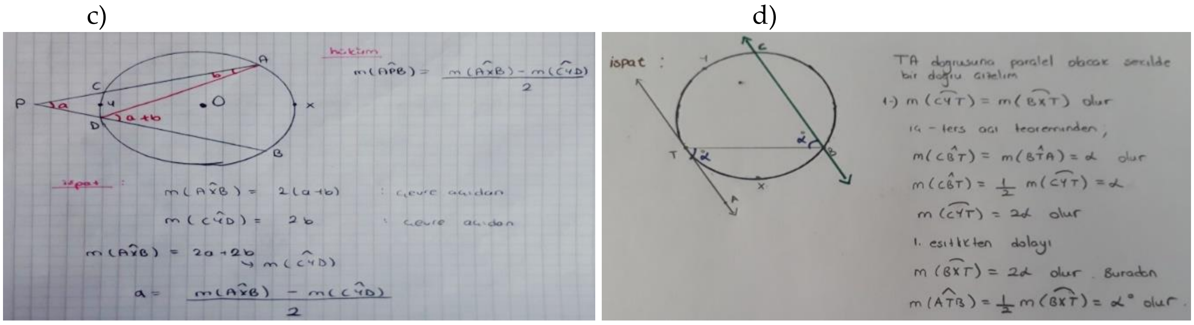


Figure 9. pre-service teachers' a) two-column and b) c) d) paragraph proof-writing on arc-chord tangent properties in a circle.

At representation of the correctness of propositions presented at the VH-model teaching activities, it is observed that the pre-service teachers are able to write valid proof and, in their writing, make use of diverse representations of proof. Accordingly, it can be said that the pre-service teachers are aware of the equal validity different presentations of proof have. Based on these findings, it is concluded that the pre-service teachers rank on VH-4 levels in proof-writing. The developmental sequence of the pre-service teachers' proof-writing skills under a general assessment of the entire VH-model learning process is presented in the Figure 10.

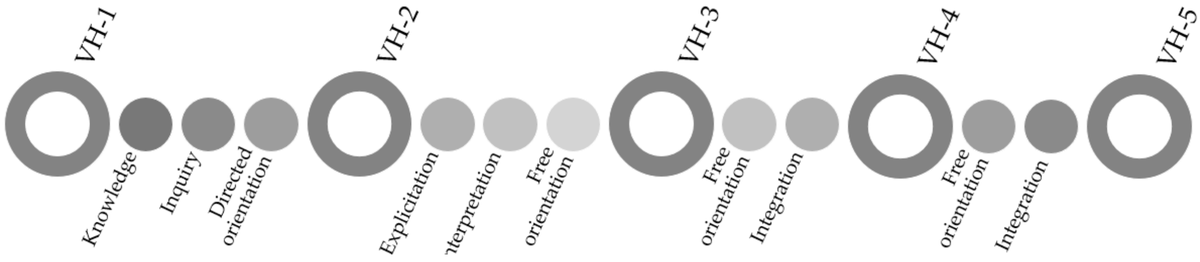


Figure 10. The developmental sequence of the pre-service teachers' proof-writing skills at the VH-model teaching activities

During the VH-model teaching activities, first, the pre-service teachers' knowledfe of geometric shapes and concepts were revealed and questioned. It was observed that certain pre-service teachers ranked on the VH-1 level in classification of geometric shapes, triangles and quadrangles. The learning process was implemented based on the VH model and through directed orientation at the teaching activities, the researcher provided explanations to supplement the pre-service teachers' insufficient knowledge. In this phase, it was observed that the pre-service teachers are able to make deductions based on the concepts' definitions and therefore, their transition to the VH-2 level was enabled. While discussing the correctness of the propositions provided to the pre-service teachers, free orientation was applied and, in this process, it was observed that the pre-service teachers were able to make logical deductions based on their rational thinking, but not accepted as proof-writing and hence, the pre-service teachers were placed on the VH-3 level. Following this level, the pre-service teachers' integration effort was supported and propositions with different contexts in diverse geometry subjects were presented. In this phase, it was observed that the pre-service teachers were able to write valid proof and also, to write them by different means (VH-4). Accordingly, it is concluded that the learning process implemented on the basis of the VH model on the pre-service teachers' improvement of their geometric thinking over VH levels and therefore, the development of their proof-writing skills.

Discussion, Conclusion and Suggestions

This study was implemented to assess the effectiveness of a VH-model-based teaching on proof-writing skills of pre-service mathematics teachers. Therefore, first the pre-service teachers' VH levels pertinent to proof-writing were identified prior to the teaching experiment. It was revealed that, prior to the VH-model teaching experiment, most of the pre-service teachers were placed on VH-1 and VH-2 levels, had limited knowledge on proof and they had difficulties in writing valid geometric proof. This finding of the study is seen as consistent with results of other studies on pre-service teachers' geometric proof-writing (Almeida, 2000; Jones, 2000; Knuth, 2002; Moore, 1994; Stylianides et al., 2007). Following identification of the VH levels the pre-service mathematics teachers had prior to the teaching experiment, a VH-model teaching experiment was implemented under the study and at the activities of the teaching experiment, the pre-service teachers' VH levels were assessed on a developmental basis. The study concluded that the pre-service teachers could not always rank on the highest VH level, but by progressive improvement, they were able to reach higher levels and the targeted approach of deductive thinking. Consequent to these assessments, the study has shown that the VH model supported development of the pre-service teachers' proof-writing to the VH-4 level. Daguplo (2014) researched pre-service teachers' proof-writing skills on the VH model and asserted that the pre-service teachers were able to reach VH-4 and VH-5, the highest levels. Moreover, an examination of the study's findings reveals that the pre-service teachers could not rank on the highest levels for proof-writing at all times and in all subjects. As a result, it is concluded that improvement of pre-service teachers' proof-writing skills is a process and the teaching components found in the VH model support pre-service teachers' development in geometric thinking and, as the highest level reached under this development, their proof-writing skills.

Diverse learning activities and exercises on proof-writing have been suggested to eliminate pre-service teachers' low performance in proof writing and to improve their proof-writing skills (Daguplo, 2014; Sarı Uzun & Bülbül, 2013). In this context, proposition-proof practices presented to students shall support their deductive skills and hence, their ability to write valid proof (Ball & Bass, 2003; Diezmann et al., 2002). It is concluded that the VH model, the effectiveness of which is assessed in this study, supports pre-service teachers' development in geometric thinking and, as the highest level reached under this development, their proof-writing skills. It is observed that the components of knowledge and inquiry, guidance/supportive direction, explicitation/interpretation, free guidance, and integration found in the VH model enable development of geometric thinking and improve pre-service teachers' proof-writing skills. In conclusion, pre-service teachers' constant exposure to proof and their continued participation in proof activities improve their proof-writing skills. Accordingly, it is observed that, when geometry teaching is implemented in an arrangement based on the VH model, pre-service teachers' understanding of deductive thinking is supported. Jupri (2018), who researched mathematics teachers' geometric proof-writing at teaching activities based on the VH model, argued that the teachers involved with geometric proof problems had their proof-writing and problem-solving skills improved and they were able to write proof with different strategies and proof methods. As suggested by various researchers, transition from one stage to another on VH levels is not the result of a natural progress but depends on the quality of personal exposure. In this study, the proof-writing activities the pre-service teachers were exposed to strengthen their geometric proof-writing capabilities. Similarly, Armah et al. (2018) suggest that the proof practices containing propositions to enable pre-service teachers' studies to higher VH levels support pre-service teachers' deduction and deductive geometric proof-writing.

This study attests that teaching activities designed and implemented on the basis of the VH model make positive contributions to mathematics pre-service teachers' geometric proof-writing skills. Furthermore, it is observed that, consequent to a series of teaching activites they participate in, pre-service teachers develop an improved understanding of geometric shapes and concepts. Similarly, Yi et al. (2020) implemented VH-model teaching activities in their study and at these activities, examined the development of mathematics pre-service teachers' geometric knowledge. In their study, they reached the conclusion that a VH-model geometry teaching improved pre-service teachers' geometric subject matter and pedagogic subject matter knowledge. Therefore, the conclusions of this study are seen as consistent with conclusions reached in other studies (Armah et al., 2018; Aslan-Tutak & Adams, 2015; Yılmaz & Koparan, 2016).

In line with the results obtained from the study, the following suggestions are made for future studies:

1. Geometry courses for mathematics pre-service teachers may be revised in their contents and scope and these courses may be re-arranged according to the VH model.
2. Geometry teaching should be supportive of pre-service teachers' development of VH geometric thinking. Pre-service teachers' understanding of properties and mutual relations of all geometric shapes should be supported through teaching activities implemented in compliance with the learning process found in the VH model. Hence, improvement to the targeted proof-writing skills placed on advanced VH levels shall be enabled.
3. At Euclidean and non-Euclidean geometry teaching activities based on the VH model, further studies to enable broader assessment of pre-service teachers' proof-writing skills may be implemented.

References

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(6), 869-890. https://doi.org/10.1080/002073900050203360

Armah, R. B., Cofie, P. O., & Okpoti, C. A. (2018). Investigating the effect of van Hiele Phase-based instruction on pre-service teachers' geometric thinking. *International Journal of Research in Education and Science, 4*(1), 314-330. https://doi.org/10.21890/ijres.383201

Aslan-Tutak, F., & Adams, T. L. (2015). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education, 7*(3), 301-318.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-230). Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27–44). National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher, 88(*1), 48-54. https://doi.org/10.5951/MT.88.1.0048

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1/2), 23-40. https://doi.org/10.1007/BF00144356

Burger, W. & Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48. https://doi.org/10.2307/749317

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. *A research companion to principls and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Macmillan.

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal*, *98*(2), 171-186. https://doi.org/10.1086/461890

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Lawrence Erlbaum Associates.

Daguplo, M. (2014). How well do you write proof? Characterizing students proof-writing skill vis-à-vis van Hiele's model in geometrical proving. *Journal of Educational and Human Resource Development*, *2*, 104-114.

De Villiers, D. M. (1987). Research evidence of hierarchical thinking, teaching strategies, and the van hiele theory: some critical comments. *Paper presented at Learning an Teaching Geometry: Issues for Research and Practice Working Conference.* Syracuse University.

Dickerson, D. S. (2008). High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof. Unpublished Doctoral dissertation, Syracuse University.

Diezmann, C., Watters, J., & English, L. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 289-296). University ot East Anglia.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S., & Choustoulakis, E. (2007). Developing a proof-writing tool for novice lyceum geometry students. *The Teaching of Mathematics*, *X*(2), 87-106.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 85-109. https://doi.org/10.1023/A:1003660018579

Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (2009). *How to design and evaluate research in education* (7th ed.). McGraw Hill Higher Education.

Freedman, H. (1983). A way of teaching abstract algebra. *The American Mathematical Monthly, 90* (9), 641-644.

Fuys, D. (1985). Van Hiele levels of thinking in geometry. *Education and Urban Society, 17*(4), 447-462.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischer, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3,* 1-196.

Goetting, M. (1995). The college students' understanding of mathematical proof. (Doctoral dissertation), University of Maryland.

Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20*(1), 219-236.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 127-150. https://doi.org/10.1023/A:1012781005718

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*, 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M.Linquist & A. Schulte (Eds.) *Learning and teaching geometry, K-12 1987 Yearbook* (pp. 222–235). The National Council of Teachers of Mathematics.

Howse, T. D., & Howse, M. E. (2014). Linking the van Hiele theory to instruction. *Teaching Children Mathematics*, *21*(5), 304-313. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.21.5.0304

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 53-60. https://doi.org/10.1080/002073900287381

Jupri, A. (2018). Using the van Hiele theory to analyze primary school teachers' written work on geometrical proof problems. 4*th International Seminar of Mathematics, Science and Computer Science Education IOP Conf. Series*, *1013*(012117). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012117

Knight, K. C. (2006). *An investigation into the change in the van Hiele levels of understanding geometry of preservice elementary and secondary mathematics teachers.* Unpublished Master thesis, University of Maine.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405. https://doi.org/10.2307/4149959

Knuth, E., Choppin, J., Slaughter, M. & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Noony (Eds.), *Proceedings of the Twenty-fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1693-1670), University of Georgia.

Kotzé, G. (2007). Investigating shape and space in mathematics: a case study. *South African Journal of Education*, *27*(1), 19-35.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry: In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-167). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 87-125. https://doi.org/10.1023/A:1012785106627

Marriotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-43. https://doi.org/10.1023/A:1012733122556

Martin, T., & McCrone, S. (2009). Formal proof in high school geometry: Students perceptions of structure, validity, and purpose. In Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Knuth, E. J. (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-l6 perspective* (pp. 204-221). Routledge.

McCrone, S. M. S., & Martin, T. S. (2004). Assessing high school students' understanding of geometric proof. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *4*(2), 223-242. https://doi.org/ 10.1080/14926150409556607

Ministry of National Education. (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)* [Mathematics curriculum: Elementary andmiddle schools 3, 4, 5, 6, 7 and 8th grades)]. Talim Terbiye Kurul Başkanlığı.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics, 27*, 249-266. https://doi.org/10.1007/BF01273731

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Raman, M., & Weber, K. (2006). Key ideas and insights in the context of three high school geometry proofs. *Mathematics Teacher, 99(9)*, 644-649. https://doi.org/10.5951/MT.99.9.0644

Reisel, R. B. (1982). How to construct and analyze proofs-a seminar course. *The American Mathematical Monthly*, *89*(7), 490-492. https://doi.org/10.1080/00029890.1982.11995483

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, *78*(6), 448-456.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 309-321. https://doi.org/10.2307/749519

Sevgi, S., & Orman, F. (2020). Eighth grade students' views about giving proof and their proof abilities in the geometry and measurement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-24. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1782493

Shanghai Education Committee. (2004). *Shanghai Primary and Secondary School Curriculum Standard*. Shanghai: Shanghai Education Press.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675. https://doi.org/10.5951/MT.91.8.0670

Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education 3*(2), 251-267. https://doi.org/10.1080/14926150309556563

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289-321. https://doi.org/10.2307/30034869

Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 133-162. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017671.47700.0b

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(3), 145-166. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. University of Chicago.

Sarı Uzun, M., & Bülbül, A. (2013). A teaching experiment on development of pre-service mathematics teachers' proving skills. *Education and Science*, *38*(169), 372-390.

van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(1), 27-34.

van Hiele, P. M. (1984). The child's through and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof & Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn.

Varghese, T. (2008). *Student teachers' conceptions of mathematical proof*. Unpublished Master thesis, University of Alberta.

Wahlberg, M. (1997). Lecturing at the "Bored". *The American Mathematical Monthly*, *104*(6), 551-556. https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990677

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119. https://doi.org/10.1023/A:1015535614355

Wu, D. B. (1994). *A study of the use of the van Hiele model in the teaching of non-Euclidean geometry to prospective elementary school teachers in Taiwan, the Republic of China.* Unpublished Doctoral dissertation, University of Northern Colorado.

Wu, H. H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(3), 221-237. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90002-4

Yackel, E., Gravemeijer, K. & Sfard, A. (Eds.) (2011). *A journey in mathematics education research*. Springer Science.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (9. baskı).* Seçkin Yayınevi.

Yi, M., Flores, R., & Wang, J. (2020). Examining the influence of van Hiele theory-based instructional activities on elementary preservice teachers' geometry knowledge for teaching 2-D shapes. *Teaching and Teacher Education*, *91*, 103038. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103038

Yılmaz, G. K., & Koparan, T. (2016). The effect of designed geometry teaching lesson to the candidate teachers' van Hiele geometric thinking level. *Journal of Education and Training Studies, 4*(1), 129-141. https://doi.org/10.11114/jets.v4i1.1067

Zaslavsky, O. (2005). *Seizing opportunity to create uncertainty in learning mathematics*. Educational Studies in Mathematics, *60*, 297-321. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0606-5