Niğde Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 4, Sayı 1, (2015), 59-67

DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN TAŞIMA VE RİJİTLİK MATRİSİ YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Nurullah KARACA*, Faruk Fırat ÇALIM

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada, daire eksenli kirişlerin statik analizi teorik olarak incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiş ve daire eksenli çubuklar için tekrar düzenlenmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve izotropik kabul edilmiştir. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler taşıma matrisi ve rijitlik matrisi yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Daire eksenli kirişlerin statik analizi için çeşitli örnekler ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar, literatür ve sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Daire Eksenli Çubuklar, Taşıma Matrisi Yöntemi, ANSYS

STATIC ANALYSIS OF CIRCULAR BEAMS WITH TRANSFER AND STIFFNESS MATRIX METHOD

ABSTRACT

In this study static analysis of circular beams is investigated theoretically. The governing equations, for naturally twisted and curved spatial rods, obtained using Timoshenko beam theory and rewritten for circular beams rods. Effects of the axial and shear deformations are considered in the formulations. The Timoshenko beam theory is adopted in the derivation of the governing equation. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and isotropic. Ordinary differential equations in scalar form are solved by using transfer matrix and stiffness matrix method. Circular beams are analyzed through various examples for static analysis. Results are compared with ANSYS results based on finite element method and available in the literature.

Keywords: Circular Beams, Transfer Matrix Method, ANSYS

1. GİRİŞ

Eğri eksenli çubukların davranışı önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Eğri eksenli çubuklar mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Literatürde, doğru eksenli kirişlerin statik ve dinamik analizleri ile ilgili birçok çalışma olmasına rağmen daire eksenli çubukların analizlerine ait yeterli çalışma bulunmamaktadır.

İnan [1], elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisini incelemiş, doğru, düzlemsel ve daire eksenli çubukların diferansiyel geçiş matrisi kullanarak taşıma matrisini elde etmiştir. Bayhan [2], daire eksenli düzlem çerçevelerin statik yükler altındaki davranışları taşıma ve rijitlik matrisi metotlarıyla çözmüştür. Daire eksenli elemanların eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörleri taşıma matrisi yöntemiyle elde etmiştir. Çalım [3], eğri eksenli çubuk sistemler ve silindirik tonoz yapıların statik yükler altındaki davranışlarını

*Corresponding author. E-mail: nukaraca@gmail.com

idare eden denklemleri kanonik halde elde etmiştir. Bu denklemleri Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metoduna dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çözmüştür. Bu metotları kullanarak FORTRAN77 dilinde bilgisayar programları hazırlamıştır. Ayrıca ANSYS programı ile karşılaştırmak amacıyla örnek problemleri tekrar çözmüştür.

Haktanır ve Kıral [4] elastik ve izotropik malzemeden yapılmış helisel çubukların statik analizini taşıma matrisi yöntemine dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çalışmışlardır ve çözüm için FORTRAN77 dilinde bilgisayar programları hazırlamışlardır. Haktanır [5], silindirik ince helisel çubukların statik ve dinamik davranışı ile eksenel yük altında stabilitesi incelemiş ve olayı idare eden denklemler taşıma ve rijitlik matrisi metotları ile çözmüştür. Bu metotlardan faydalanarak kesin ve etkin çözüm yapan bilgisayar programları geliştirmiştir. Yıldırım ve ark. [6], doğru ve daire eksenli elemanlardan oluşan bileşik düzlem çerçevelerin statik analizini rijitlik matrisi yöntemiyle incelemişlerdir. Dairesel elemanlara ait eleman rijitlik matrisleri ve ankastrelik uç kuvvetlerini taşıma matrisi metodu ile kesin olarak elde etmişlerdir. Aköz ve Omurtag [7] Gateaux diferansiyelini kullanarak, dairesel ve uzaysal çubuklara ait fonksiyoneller ile bunlara ait karışık sonlu eleman matrislerini vermişlerdir. Lee [8] düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü dairesel eleman rijitlik matrislerini, esneklik matrisinden hesaplamıştır. Bu matrisleri birleştirerek eksenel ve kayma şekil değiştirmelerinin olmadığı, 12x12 lik genel eleman matrisini kapalı formda vermiştir. Yamada ve Ezawa [9] düzlem için eleman rijitlik matrisini diferansiyel denklem yaklaşımı ile elde etmişlerdir. Just [10] düzlemi içinde yüklü ince dairesel çubuklar için, iki yer değiştirme fonksiyonu ile elde ettikleri 6x6 lık kesin eleman rijitlik matrisini sunmuştur. Tüfekçi [11], eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi statik problemlerini eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak incelemiştir. Elde edilen lineer diferansiyel denklem takımının çözümünü başlangıç değerleri yöntemi ile yaparak çember ve parabol eksenli çubuklar için çeşitli problemler çözmüştür. Eroğlu [12], eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve dinamik davranışları yeni bir sonlu eleman yöntemiyle incelemiş ve sonuçlar hem literatürdeki sonuçlarla hem de sonlu eleman paket programlarından elde edilen sonuçlarla karşılaştırmıştır. Doğruer [13], eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini, başlangıç değerleri yöntemi ile kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerini de dikkate alarak, analitik olarak çözmüştür. Akhtar [14] düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü dairesel eleman rijitlik matrislerini, esneklik matrisinden hesaplamışlardır. Laman [15], Zeiss-Dywidag olarak bilinen silindirik tonoz çatı sistemi, statik yükler altında davranışını taşıma matrisi yöntemi ile incelemiş ve kenar kiriş, öngerilme ve kısmi yükleme durumları için ayrı ayrı FORTRAN77 dilinde bilgisayar programları hazırlamıştır. Thornton ve Master [16], I kesitli düzlemsel eğri eksenli kirişler için direkt rijitlik matrisi formülasyonunu kayma şekil değiştirmeleri ile kesit çarpılmasını göz önüne alarak rijitlik matrisini kapalı formda vermişlerdir. Özçıkrıkçı [17], değişken kesitli, radyal yüklü dairesel çubukların düzlem içi burkulmasını incelemiştir ve bir başlangıç değer yöntemi olan taşıma matrisi metodu kullanılarak sabit kesitli dairesel çubukların düzlem içi burkulma yüklerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan taşıma matrisi kapalı bir şekilde elde etmiştir. Daha sonra değişken kesitli dairesel çubukların düzlem içi burkulma yüklerini hesaplayabilmek için Picard iterasyonu kullanılarak yaklaşık bir yöntem oluşturmuştur.

Bu çalışmada, daire eksenli kirişlerin statik analizi incelenmiştir. Daire eksenli kirişleri idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler taşıma matrisi yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Sonlu elemanlar yönteminde, problemi yüzlerce eleman ile tanımlamak gerekirken, önerilen bu yöntemde sadece birkaç veya istenildiği kadar elemanla tanımlayarak istenilen noktanın kesit tesiri değerleri elde edilebilmektedir.

2. FORMÜLASYON

Çubuk ekseni üzerinde herhangi bir s noktasında yer değiştirme $\mathbf{U}^o$ ve bu noktadaki kesitin dönmesi $\mathbf{\Omega}^o$ olarak gösterilsin. **T** vektörü ile s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve **M** ile bunların ağırlık merkezine indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet **p** ve moment **m** olsun. Çubuk malzemesi lineer elastik ve izotropiktir. Uzaysal çubuğu idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir.

$$\boldsymbol{\gamma}^{O} = \frac{\partial \mathbf{U}^{O}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}^{O}, \qquad \boldsymbol{\omega}^{O} = \frac{\partial \mathbf{\Omega}^{O}}{\partial s} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{O}}{\partial s} + \mathbf{p} = \mathbf{0}\,, \qquad \frac{\partial \mathbf{M}^{O}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T}^{O} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \tag{2}$$

Çubuk kesitinin kayma merkezi ile geometrik merkezinin çakıştığı, kesit çarpılmasının ihmal edildiğini göz önüne alarak ve çubuk malzemesinin homojen, izotrop ve lineer elastik olduğu kabulleri altında bünye denklemleri şöyle verilmektedir.

$$T_i^o = A_{ij}\,\gamma_j^o\,, \qquad M_i^o = D_{ij}\,\omega_j^o \qquad (i, j = t, n, b) \tag{3}$$

A_{ij} çubuğun eksenel ve kayma rijitliğini, D_{ij} ise çubuğun burulma ve eğilme rijitliğini göstermektedir.

$$[A] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \tag{4}$$

A kesit alanı, E ve G elastik sabitler, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörleridir. I_t burulma ve I_n, I_b ise eğilme atalet momentleridir.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse **n**, **b** eksenleri asal eksenler olmaktadır. Eğri eksenli çubukların davranışını idare eden diferansiyel denklemler **t**, **n**, **b** hareketli eksen takımında aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial U_t}{\partial s} = \chi U_n + \frac{1}{EA} T_t \tag{5a}$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial s} = -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{\alpha_n}{GA} T_n \tag{5b}$$

$$\frac{\partial U_b}{\partial s} = -\tau U_n - \Omega_n + \frac{\alpha_b}{GA} T_b \tag{5c}$$

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial s} = \chi \Omega_n + \frac{1}{GI_t} M_t \tag{5d}$$

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial s} = -\chi \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{1}{EI_n} M_n \tag{5e}$$

$$\frac{\partial \Omega_b}{\partial s} = -\tau \Omega_n + \frac{1}{EI_b} M_b \tag{5f}$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial s} = \chi T_n - p_t \tag{5g}$$

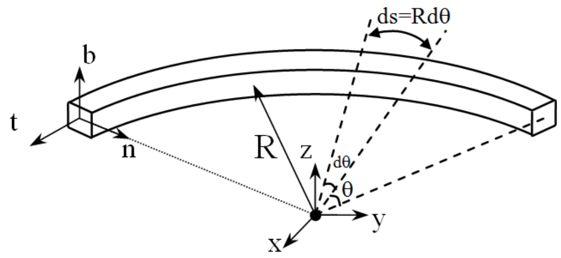
$$\frac{\partial T_n}{\partial s} = \tau T_b - \chi T_t - p_n \tag{5h}$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial s} = -\tau T_n - p_b \tag{5i}$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial s} = \chi M_n - m_t \tag{5j}$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial s} = \tau M_b - \chi M_t + T_b - m_n \tag{5k}$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial s} = -\tau M_n - T_n - m_b \tag{5l}$$



Şekil 1. Daire eksenli çubuk

Düzlemsel çubuklarda tabi burulma sıfır (τ = 0) ve daire eksenli çubuklarda eğrilik ise sabittir (χ = 1/R). Dairesel bir çubukta ds uzunluk elemanı ds = R dϕ olarak ifade edilmektedir (Şekil 1). Dış yüklerin bulunmadığı, hareketli koordinat takımında düzlemi içinde yüklü dairesel kirişleri idare eden 6 adet adi diferansiyel denklem takımı aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + R\,\frac{T_t}{C_{tt}} \tag{6a}$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + R\,\Omega_n + R\,\frac{T_n}{C_{nn}} \tag{6b}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = R\,\frac{M_b}{D_{bb}} \tag{6c}$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n \tag{6d}$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t \tag{6e}$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R\,T_n \tag{6f}$$

Elemanları, dairesel kirişlerin herhangi bir ϕ kesitindeki kesit büyüklükleri olan {S(ϕ)} durum vektörü

$$\{S(\phi)\} = \{U_t(\phi), U_n(\phi), \Omega_b(\phi), T_t(\phi), T_n(\phi), M_b(\phi)\}^T \tag{7}$$

ve [D] diferansiyel geçiş matrisi ile (5) denklemleri matris notasyonunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d\{S(\phi)\}}{d\phi} = [D]\ \{S(\phi)\} \tag{8}$$

2.1. Taşıma Matrisi

Bu yöntem ile sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştürerek çözüm yapılmaktadır. [F] taşıma matrisi ile (7) denkleminin homojen çözümü aşağıdaki şekilde yapılmaktadır.

$$\{S(\phi)\}=[F(\phi)]\ \{S(0)\} \tag{9}$$

Taşıma matrisi, ϕ = 0 başlangıç noktası ile $\phi = \phi$ noktası arasındaki geçişi sağlayan [F] matrisidir. {S(ϕ)} kolon vektörü, ϕ = ϕ deki durum vektörünü, {S(0)} kolon vektörü ise ϕ = 0 daki durum vektörünü ifade etmektedir. (5) denklemlerinde, U_t deplasmanı esas değişken olarak seçilir ve diğer fonksiyonlar bunların türevleri cinsinden ifade edilirse, eksenel ve kayma deformasyonu ihmal (10a-e) ve eksenel ve kayma deformasyonu dâhil (11a-e) diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi bulunur:

$$U_n = \frac{dU_t}{d\phi} \tag{10a}$$

$$\Omega_b = \frac{1}{R}\left[U_t + \frac{d^2U_t}{d\phi^2} \right] \tag{10b}$$

$$M_b = \frac{D_{bb}}{R^2}\left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^2U_t}{d\phi^2} \right] \tag{10c}$$

$$T_n = -\frac{1}{R^3}\ \frac{d}{d\phi}\left[D_{bb}\left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^3U_t}{d\phi^2} \right]\right] \tag{10d}$$

$$T_t = \frac{1}{R^3}\ \frac{d}{d\phi^2}\left[D_{bb}\left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^3U_t}{d\phi^3} \right]\right] \tag{10e}$$

$$U_n = \frac{dU_t}{d\phi} - \left[\frac{D_{bb}\, C_{nn}}{D_{bb}\, C_{nn} + D_{bb}\, C_{tt} + R^2\, C_{tt}\, C_{nn}} \right]\left[\frac{d^3U_t}{d\phi^3} + \frac{d^5U_t}{d\phi^5} \right] \tag{11a}$$

$$\Omega_b = \frac{1}{R}\left[U_t + \frac{d^2U_t}{d\phi^2} + \frac{D_{bb}\, C_{tt}\, C_{nn}}{D_{bb}\, C_{nn} + D_{bb}\, C_{tt} + R^2\, C_{tt}\, C_{nn}} \left[-\frac{1}{C_{nn}}\frac{d^2U_t}{d\phi^2} + \left(\frac{1}{C_{nn}} - \frac{1}{C_{tt}} \right)\frac{d^4U_t}{d\phi^4} - \frac{1}{C_{tt}}\frac{d^6U_t}{d\phi^6} \right]\right] \tag{11b}$$

$$M_b = \frac{D_{bb}}{R^2}\left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^3U_t}{d\phi^3} + \frac{D_{bb}\, C_{tt}\, C_{nn}}{D_{bb}\, C_{nn} + D_{bb}\, C_{tt} + R^2\, C_{tt}\, C_{nn}} \left[-\frac{1}{C_{nn}}\frac{d^3U_t}{d\phi^3} + \left(\frac{1}{C_{nn}} - \frac{1}{C_{tt}} \right)\frac{d^5U_t}{d\phi^5} - \frac{1}{C_{tt}}\frac{d^7U_t}{d\phi^7} \right]\right] \tag{11c}$$

$$T_n = \left[-\frac{D_{bb}\, C_{nn}\, C_{tt}}{D_{bb}\, C_{nn} + D_{bb}\, C_{tt} + R^2\, C_{tt}\, C_{nn}} \right]\left[\frac{d^2U_t}{d\phi^2} + \frac{d^4U_t}{d\phi^4} \right] \tag{11d}$$

$$T_t = \left[\frac{D_{bb}\, C_{nn}\, C_{tt}}{D_{bb}\, C_{nn} + D_{bb}\, C_{tt} + R^2\, C_{tt}\, C_{nn}} \right]\left[\frac{d^3U_t}{d\phi^3} + \frac{d^5U_t}{d\phi^5} \right] \tag{11e}$$

Burada $C_{tt} = EA$, $C_{nn} = GA/\alpha_n$, $D_{bb} = EI_b$ malzemeyle ilgili olan rijitlikleri ifade etmektedir. Aynı denklemlerden yok etmeğe devam edilirse, homojen kısım için

$$\frac{d^6U_t}{d\phi^6} + 2\frac{d^4U_t}{d\phi^4} + \frac{d^2U_t}{d\phi^2} = 0 \tag{12}$$

şeklinde diferansiyel denklemi elde edilir. (12) denkleminin homojen çözümünden hareket edilerek, MATHEMATICA programlama diliyle yazılan bir program yardımıyla [F] taşıma matrisi elde edilmektedir. Böylece ϕ = 0 başlangıç kesitinden ϕ = ϕ kesitindeki büyüklüklere geçişi sağlayan taşıma matrisi analitik olarak elde edilmektedir. Homojen kısmın çözümü,

$$U_t = C_1 + C_2\,\phi + C_3\,\mathrm{Sin}\,\phi + C_4\,\mathrm{Cos}\,\phi + C_5\,\phi\,\mathrm{Sin}\,\phi + C_6\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi \tag{13}$$

şeklinde olup C_i integrasyon sabitlerini göstermektedir. Yayılı ve tekil yüklerin birlikte bulunması durumunda genel çözüm,

$$\{S(\phi)\} = [F(\phi)]\,\{S(0)\} + \sum_{i=1}^{n} [F(\phi-\beta)]\,\{K(\beta)\} + \int_0^{\phi} [F(\phi-\alpha)]\,\{K(\phi)\}\,\mathrm{d}\alpha \tag{14}$$

şeklindedir. (14) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci terim tekil yüklere ait, üçüncü terim ise yayılı yüklere ait özel çözümü göstermektedir. İkinci terimde yer alan {K(β)} tekil yükten dolayı süreksizlik vektörü, β tekil yükün olduğu yere kadar başlangıçtan itibaren ölçülen açıdır.

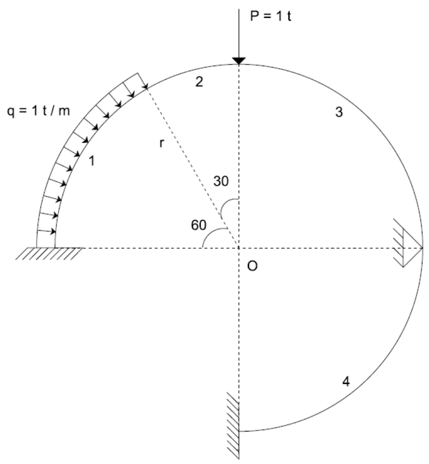
$$\{K(\beta)\} = \{\,0, 0, 0, -T_t(\beta), -T_n(\beta), -M_b(\beta)\,\}^T \tag{15}$$

$$\{K(\alpha)\} = \{\,0, 0, 0, -r\,p_t(\alpha), -r\,p_n(\alpha), -r\,m_b(\alpha)\,\}^T \tag{16}$$

3. SAYISAL UYGULAMA

Bu çalışmada, statik yükleme altında daire eksenli kirişlerin davranışını analiz etmek için genel amaçlı Mathematica dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Önerilen yöntemin geçerliliğini test etmek amacı ile literatürdeki mevcut iki örnek ele alınmıştır. Ele alınan örneklerde kayma deformasyon etkisi incelenmektedir. Ayrıca ele alınan örnekler sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı yardımı ile farklı eleman sayıları içeren çözümler yapılmıştır. ANSYS programı ile daire eksenli çubuklar BEAM 3 çubuk elemanı kullanılarak modellenmektedir.

Örnek 1 Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır. Daire eksenli kirişe, $q_n = 1\ t\,/\,m$ yayılı ve $P = 1\ t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, atalet momenti I_n = 1/12 m^4, yarıçap R = 10 m, elastisite modülü $E = 1\times10^6$ t/m^2, Poisson oranı ν = 0.3 olarak verilmiştir. Probleme ait sonuçlar Tablo 1'de verilmektedir. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınarak ANSYS programı ile farklı eleman sayıları için çözümler yapılmış ve elde edilen daire eksenli çubuğa ait kesit tesirleri Tablo 1'de verilmektedir.



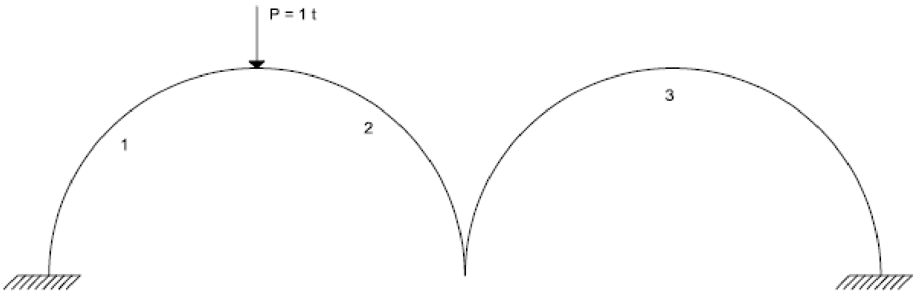
Şekil 2. İki ucu ankastre daire eksenli kiriş

Tablo 1. İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan [2]	Çalım [3]	ANSYS (36 el.)	ANSYS (72 el.)	ANSYS (144 el.)	ANSYS (270 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
1	Tt_i (t)	4,318	4,318	3,903	4,113	4,216	4,264	4,318	4,323
	Tn_i (tm)	-6,203	-6,203	-6,472	-6,341	-6,273	-6,241	-6,203	-6,184
	Mb_i (tm)	-19,052	-19,050	-19,08	-19,06	-19,051	-19,050	-19,052	-18,945
	Tt_j (t)	-1,787	-1,787	-1,664	-1,726	-1,757	-1,770	-1,787	-1,806
	Tn_j (tm)	-1,819	-1,819	-1,932	-1,877	-1,848	-1,835	-1,819	-1,825
	Mb_j (tm)	-6,262	-6,262	-6,228	-6,253	-6,259	-6,261	-6,262	-6,218
2	Tt_i (t)	1,787	1,787	1,902	1,846	1,817	1,803	1,787	1,806
	Tn_i (tm)	1,819	1,819	1,699	1,76	1,790	1,804	1,819	1,825
	Mb_i (tm)	6,262	6,262	6,228	6,253	6,259	6,261	6,262	6,218
	Tt_j (t)	-2,457	-2,457	-2,407	-2,434	-2,446	-2,450	-2,457	-2,477
	Tn_j (tm)	-0,682	-0,682	-0,842	-0,762	-0,722	-0,703	-0,682	-0,678
	Mb_j (tm)	0,438	0,438	0,475	0,449	0,443	0,441	0,438	0,488
3	Tt_i (t)	2,457	2,457	2,562	2,511	2,484	2,470	2,457	2,477
	Tn_i (tm)	1,682	1,682	1,518	1,601	1,642	1,661	1,682	1,678
	Mb_i (tm)	-0,438	-0,438	-0,475	-0,449	-0,443	-0,442	-0,438	-0,488
	Tt_j (t)	-1,682	-1,682	-1,839	-1,762	-1,722	-1,703	-1,682	-1,678
	Tn_j (tm)	2,457	2,457	2,342	2,40	2,429	2,442	2,457	2,477
	Mb_j (tm)	-7,177	-7,316	-7,272	-7,301	-7,309	-7,310	-7,316	-7,505
4	Tt_i (t)	1,174	1,174	1,267	1,2199	1,194	1,182	1,174	1,304
	Tn_i (tm)	1,675	1,675	1,584	1,629	1,650	1,660	1,675	1,786
	Mb_i (tm)	7,316	7,316	7,272	7,301	7,309	7,310	7,316	7,505
	Tt_j (t)	-1,675	-1,675	-1,736	-1,706	-1,688	-1,680	-1,675	-1,786
	Tn_j (tm)	1,174	1,174	1,05	1,111	1,1398	1,153	1,174	1,304
	Mb_j (tm)	-2,309	-2,309	-2,24	-2,278	-2,287	-2,289	-2,309	-2,688

Bu çalışmada bulunan sonuçların literatürdeki sonuçlar ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Tablo 1 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Kayma deformasyon etkisinin sonuçları çok etkilemediği görülebilmektedir.

Örnek 2 İki yarım daireden oluşan iki ucu ankastre daire eksenli çubuk problemi ele alınmaktadır. Daire eksenli kirişe, $P = 1\ t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, atalet momenti $I_n = 1/12\ m^4$, yarıçap $R = 10$ m, elastisite modülü $E = 1\times10^6\ t/m^2$, Poisson oranı $\nu = 0,3$ olarak verilmiştir. Probleme ait sonuçlar Tablo 2'de verilmektedir. Sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile farklı eleman sayılarını içeren çözümler yapılmıştır.



Şekil 3. İki yarım daireden oluşan daire eksenli kiriş

Tablo 2. Örnek 2 ait sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan [2]	Çalım [3]	ANSYS (40 el.)	ANSYS (80 el.)	ANSYS (120 el.)	ANSYS (240 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
1	Tti (t)	0,811	0,811	0,826	0,819	0,816	0,813	0,811	0,811
	Tni (tm)	0,227	0,230	0,165	0,197	0,208	0,219	0,227	0,230
	Mbi (tm)	-3,173	-3,158	-3,172	-3,162	-3,161	-3,159	-3,173	-3,158
	Ttj (t)	-0,227	-0,230	-0,292	-0,261	-0,251	-0,240	-0,227	-0,230
	Tnj (tm)	0,811	0,811	0,79	0,801	0,804	0,808	0,811	0,811
	Mbj (tm)	-2,661	-2,652	-2,643	-2,65	-2,651	-2,652	-2,661	-2,652
2	Tti (t)	0,227	0,230	0,243	0,237	0,234	0,232	0,227	0,230
	Tni (tm)	0,189	0,189	0,171	0,180	0,183	0,187	0,189	0,189
	Mbi (tm)	2,661	2,652	2,643	2,65	2,651	2,652	2,661	2,652
	Ttj (t)	-0,189	-0,189	-0,207	-0,198	-0,195	-0,192	-0,189	-0,189
	Tnj (tm)	0,227	0,230	0,214	0,222	0,225	0,227	0,227	0,230
	Mbj (tm)	-3,037	-3,053	-3,046	-3,05	-3,05	-3,05	-3,037	-3,053
3	Tti (t)	-0,189	-0,189	-0,171	-0,180	-0,183	-0,187	-0,189	-0,189
	Tni (tm)	0,227	0,230	0,244	0,237	0,235	0,227	0,227	0,230
	Mbi (tm)	3,037	3,053	3,046	3,05	3,05	3,05	3,037	3,053
	Ttj (t)	-0,189	-0,189	-0,207	-0,198	-0,195	-0,192	-0,189	-0,189
	Tnj (tm)	0,227	0,230	0,214	0,222	0,225	0,227	0,227	0,230
	Mbj (tm)	0,753	0,736	0,737	0,737	0,737	0,737	0,753	0,736

Bu çalışmada bulunan sonuçların literatürdeki sonuçlar ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Tablo 2 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Kayma deformasyonunun çok sınırlı etkisi olduğu görülmektedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, daire eksenli kirişlerin statik analizi için etkin bir yöntem sunulmuştur. Daire eksenli kirişleri idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler taşıma matrisi ve rijitlik matrisi yöntemi yardımıyla çözülmüştür.

Daire eksenli çubukların statik analizi için literatürde farklı yöntemler kullanılarak incelenen örnekler ele alınmıştır. Aynı zamanda incelenen örnekler sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile de çözümler yapılmıştır. ANSYS programı ile çözüm yapılırken istenilen hassasiyette sonuç alabilmek için problem yüzlerce elemanla modellenmesi gerekebilmektedir. Ayrıca daire eksenli çubuklarda kayma deformasyon etkisi araştırılmıştır. İncelenen örnekler üzerinde kayma deformasyon etkisinin çok sınırlı olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] İNAN, M., Elastik Çubukların Genel Teorisi, İTÜ Yayını, İstanbul, 1966.
[2] BAYHAN. S., Daire Eksenli Çubuklar Düzlemsel Çubukların Taşıma ve Rijitlik Matrisi Yöntemi ile Analizi, (Yüksek Lisans Tezi), Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1993.
[3] ÇALIM, F. F., Eğri Eksenli Çubuk Sistemler Ve Silindirik Tonoz Yapıların Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Rijitlik Matrisi Yöntemi İle Statik Analizi, (Yüksek Lisans Tezi), Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1996.
[4]HAKTANIR, V., and KIRAL, E., "Statical Analysis of Elastically and Continuously Supported Helicoidal Structures by the Transfer and Stiffness Matrix Methods", Computers & Structures, 49(4), 663-77, 1993.
[5] HAKTANIR, V., Silindirik Helisel Çubukların Statik, Dinamik ve Burkulma Davranışlarının Taşıma ve Rijitlik Matrisleri Metodu ile İncelenmesi, (Doktora Lisans Tezi), Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1990.
[6] YILDIRIM, V., İNCE, N., and KIRAL, E., "Doğru ve Daire Eksenli Elemanlardan Oluşan Bileşik Düzlem Çerçevelerin Statik Analizi", J. of Engineering and Environmental Sciences, 137-148, 1997.
[7] AKÖZ, Y., OMURTAG, M. H., "Dairesel ve Doğrusal Uzaysal Çubukların Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu", İ.M.O. Teknik Dergi. Ekim, 565-574, 1992.
[8] LEE, H. P., "Generalized Stiffness Matrix of a Curved-Beam Element", AIAA, Jnl., 7, 2043-2045, 1969.
[9] YAMADA, Y., EZAWA, Y., "On Curved Finite Elements for the Analysis of Circular Arches", Int. J. Numer. Meth. Engng., 11, 1635-1651, 1977.
[10] JUST, D. J., "Circularly Curved Beams Under Plane Loads", J. Struct. Div. ASCE, 108, 1858-1873, 1982.
[11] TÜFEKÇİ, E., Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, Doktora tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994.
[12] EROĞLU, U., Eğri Eksenli Çubukların Analizi İçin Analitik Çözümle Sonlu Eleman Formülasyonu, (Yüksek Lisans Tezi), İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2014.
[13] DOĞRUER, O.Y., Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Düzlem Dışı Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü, (Doktora Tezi), İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.
[14] AKHTAR, M., "Element Stiffness of Circular Member", ASCE, J. Struct. Engng., 113, 867-872, 1987.
[15] LAMAN, M., Dairesel Silindirik Tonoz Çatıların Taşıma Matrisi Yöntemi İle Çözümü, (Yüksek Lisans Tezi), Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1990.
[16] THORNTON, S. K., MASTER, B. G., "Direct stiffness formulation for horizontally Curved Beams", J. Struct. Div. ASCE, 108, 1858-1873, 1982.
[17] ÖZÇIKRIKÇI, Ö., Burkulma Esnasındaki Dış Yük Davranışının Hesaba Katıldığı Değişken Kesitli Dairesel Çubukların Taşıma Matrisi Yöntemiyle Düzlem İçi Burkulma Yükü Hesabı, (Yüksek Lisans Tezi), İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003.