Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi
Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science
2021, 16(1): 137-146
DOI: 10.29233/sdufeffd.866055
Atıf için / For Citation: M.B Huban, "Asimptotik lacunary istatistiksel ϕ-denk üç indisli diziler üzerine", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 16(1), 137-146, 2021.

Asimptotik Lacunary İstatistiksel ϕ-Denk Üç İndisli Diziler Üzerine

Mualla Birgül HUBAN*[1]

[1]*Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Büyükkutlu Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Bankacılık ve Sigortacılık Bölümü, 32400, Isparta, Türkiye*

**yazışılan yazar e-posta: muallahuban@isparta.edu.tr*

(Alınış / Received: 21.01.2021, Kabul / Accepted: 02.04.2021, Yayımlanma / Published: 27.05.2021)

Özet: İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez, Fast [2] tarafından verilmiştir. Bu kavram, hem uygulamalı matematikte hem de matematiği içeren diğer bilim dallarında önemli rol oynar. Marouf [13] ise 1993'te asimptotik denk dizilerde yeni kavramlar vermiştir. 1980'de yaptığı çalışmada ise Patterson [16] asimptotik denk diziler için istatistiksel benzerlerini sunmuştur. 2006'da Patterson ve Savaş [17] lacunary dizileri kullanarak bu kavramlara yeni bir boyut kazandırmıştır. Diğer taraftan, üç indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı Şahiner vd. [20] tarafından sunulmuştur. Aynı zamanda literatürdeki bazı çalışmalarda, herhangi bir reel dizinin istatistiksel yakınsaklığı mutlak değere göre belirlenir. Reel sayıların mutlak değeri özel bir Orlicz fonksiyonu olarak bilinir [19]. Bu makalenin temel amacı, üç indisli diziler için asimptotik olarak istatistiksel ϕ-denk ve asimptotik olarak lacunary istatistiksel ϕ-denk kavramlarını tanımlamaktır. Belli özel koşul altında Orlicz fonksiyonundan yararlanarak, yeni ispatlar vermek ve yeni kavramları literatüre kazandırmaya çalışmaktır. Ayrıca bu yeni notasyonlar arasındaki ilişkiler de çalışmamızda verilmiştir.

***Anahtar kelimeler**:* Üç indisli dizi, Orlicz fonksiyonu, Lacunary dizi, Üç indisli istatistiksel yakınsaklık, ϕ-yakınsaklık.

On Asymptotically Lacunary Statistically ϕ-Equivalent Triple Sequences

Abstract: The concept of statistical convergence was first given by Fast [2]. This concept plays an important role in both applied mathematics and other diciplines that include mathematics. Marouf [13] gave new concepts in asymptotic equivalent series in 1993. In his study in 1980, Patterson [16] presented statistical similarities for asymptotic equivalent sequences. In 2006, Patterson and Savaş [17] add a new dimension to these concepts by using the lacunary series. On the other hand, the concept of statistical convergence for triple sequences is presented by Şahiner et al. in study [20]. Also, in some studies in the literature, the statistical convergence of any real series is determined by absolute value. The absolute value of real numbers is known as a special Orlicz function [19]. The primary goal of this article is to introduce the concepts of asymptotically statistically ϕ-equivalent and asymptotically lacunary statistically ϕ-equivalent triple sequences. Using the Orlicz function under special condition, new proofs are given and new concepts are introduced into the literature. Also, the relationship between these new notations will be given.

***Key words**:* Triple sequences, Orlicz function, Lacunary Sequence, Triple statistical convergence, ϕ-convergence.

Mualla Birgül HUBAN, muallahuban@isparta.edu.tr, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2710-8487

1. Giriş

Fast [2] ve Schoenberg [24] bağımsız olarak istatistiksel yakınsaklık kavramını ortaya koymuştur. Salat [21] ın çalışmasında, bu fikir aşağıda tanımlandığı gibi temel olarak tüm pozitif tam sayıların kümesi olan ℕ nin altkümelerinin doğal yoğunluğuna dayandırılmıştır. Burada ℕ nin bir A altkümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in A\}| \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Fridy [3] nin yaptığı çalışmanın ardından ise bu kavram, toplanabilirlik teorisinde önemli bir konu haline gelmiştir. Önceki çalışmalarda da olduğu gibi, bu konuda tek indisli dizilerle ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır [15, 22, 23]. Son zamanlarda, Mursaleen ve Edely [14] çoklu diziler için istatistiksel yakınsaklık fikrini ortaya koymuş ve daha sonraki yıllarda tek, çift ve üç indisli diziler için istatistiksel ve ideal yakınsaklıkla ilgili çok sayıda çalışmalar yapılmıştır (bknz [1, 4-11, 25-28]). Bu çalışmada kullanılan asimptotik denklik kavramı ise Patterson tarafından ortaya atılarak bazı yazarlar tarafından geliştirilmiştir. Patterson [16], bu tanımların asimptotik istatistiksel denk benzerliğini ve negatif olmayan toplamsal matrisler için doğal regülerlik durumlarını vererek bu kavramları genişletmiştir. Pobyvanets [18] iki negatif olmayan sayı dizisinin asimptotik denkliğini koruyan asimptotik regüler matris tanımını vermiştir. Marouf [13] ve Li [12] ise, toplanabilirlik teorisindeki iki dizinin asimptotik denkliği arasındaki ilişkiyi çalışmış ve asimptotik denkliğin bazı varyasyonlarını vermiştir. Yine Patterson ve Savaş [17] çalışmasındaki asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını; lacunary diziler, istatistiksel yakınsaklık, asimptotik denklik kavramlarını içeren doğal bir kombinasyonu olarak vermişlerdir. Aynı zamanda literatürdeki bazı çalışmalarda, herhangi bir reel dizinin istatistiksel yakınsaklığı mutlak değere göre belirlenir ve reel sayıların mutlak değeri özel bir Orlicz fonksiyonu olarak bilinir [19]. Bu motivasyonla çalışmamızın ilk kısmında üç indisli diziler için asimptotik olarak istatistiksel ϕ-denk ve asimptotik olarak lacunary istatistiksel ϕ-denk kavramları tanımlanmıştır. Daha sonra ise özel koşul altında Orlicz fonksiyonunu kullanarak yeni ispatlar verilmiş ve yeni kavramlar literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca bu yeni notasyonlar arasındaki ilişkiler de çalışmamızda verilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu kısımda makalemizde kullanacağımız bazı tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir.

Şahiner vd. [20] tarafından verilen üç indisli dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki gibi verebiliriz:

$x: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) fonksiyonuna üç indisli reel (ya da kompleks) dizi denir. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ için $j, k, l \geq n_0$ iken $|x_{jkl}| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mevcut ise o zaman üç indisli (x_{jkl}) dizisine Pringsheim anlamında L ye yakınsaktır denir. Eğer her $j, k, l \in \mathrm{N}$ için $|x_{jkl}| < M$ olacak şekilde $M > 0$ mevcut ise, o zaman üç indisli (x_{jkl}) dizisi sınırlıdır. Burada tüm sınırlı üç indisli dizilerinin uzayı ℓ_∞^3 ile gösterilmiştir.

Tanım 2.1. Eğer

$$\delta_3(K) = P - lim_{n,k,l\to\infty} \frac{|K_{nkl}|}{nkl} \tag{2}$$

mevcut ise o zaman $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nin bir K altkümesi $\delta_3(K)$ doğal yoğunluğuna sahiptir denir. Burada dikey çizgiler $p\leq n$, $q\leq k$, $r\leq l$ olacak şekilde K deki (n,k,l) sayısının eleman sayısını tanımlar. Böylece eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_3\left(\left\{(n,k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}: p \leq n, q \leq k, r \leq l, \left|x_{pqr} - L\right| \geq \varepsilon \right\}\right) = 0 \tag{3}$$

ise o zaman reel bir üç indisli $x = \left(x_{pqr}\right)$ dizisine Pringsheim anlamında L değerine istatistiksel yakınsaktır denir.

Literatürdeki bazı çalışmalarda, herhangi bir reel dizinin istatistiksel yakınsaklığı mutlak değere göre belirlenir. Bu bağlamda reel sayıların mutlak değeri özel bir Orlicz fonksiyonu olarak bilinir [19]. Burada $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu çift, $\mathbb{R}^+$ de azalmayan, $\mathbb{R}$ de sürekli ve

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } \phi(x) \to \infty, x \to \infty \text{ için}$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Buna ilave olarak eğer her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\phi(2x) \leq M.\phi(x)$ olacak şekilde bir pozitif reel M sayısı varsa $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Orlicz fonksiyonuna Δ_2 koşulunu sağlar denir.

Şimdi Marouf [13] tarafından verilen asimptotik denk diziler kavramını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

Tanım 2.2. Eğer

$$lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

ise o zaman iki negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine asimptotik denktir denir ve $(x{\sim}y)$ ile gösterilir.

Patterson [16], asimptotik istatistiksel denklik kavramını tanıtmak için istatistiksel yakınsaklık ve asimptotik denklik kavramlarının doğal bir kombinasyonunu aşağıdaki şekilde sunmuştur.

Tanım 2.3. Her $\varepsilon > 0$ için

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k < n : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{4}$$

ise o zaman iki negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine çoklu L nin asimptotik istatistiksel denkliği denir ($(x \sim^{S_L} y)$ ile gösterilir). Eğer $L = 1$ ise basit asimptotik istatistiksel denktir olarak adlandırılır.

Bu sonuçların ardından, çoklu L nin asimptotik lacunary istatistiksel denkliği ve çoklu L nin kuvvetli asimptotik lacunary denkliği olarak iki yeni kavram verilmiştir. Burada $k_0 = 0$ ve $r = 0,1,2,...$ olmak üzere $\theta = k_r$ lacunary dizisi $r \to \infty$ iken $k_r - k_{r-1}$ ile negatif olmayan tamsayıların bir artan dizisi anlamına gelmektedir. Burada θ ile belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_{r-1}]$ ve $h_r = k_r - k_{r-1}$ ile gösterilmiştir ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile tanımlanmıştır.

Ayrıca, Esi ve Savaş [1] tarafından yeni bir dizi olan üç indisli lacunary dizi kavramı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$j_0 = 0, h_r = j_r - j_{r-1} \to \infty, r \to \infty \text{ için,}$$

$$k_0 = 0, h_s = k_s - k_{s-1} \to \infty, s \to \infty \text{ için,}$$

ve

$$l_0 = 0, h_t = l_t - l_{t-1} \to \infty, t \to \infty \text{ için}$$

olacak şekilde üç artan tamsayı dizisi mevcut ise, o zaman $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ üçlü dizisine üç indisli lacunary dizi denir. Burada $k_{r,s,t} = j_r k_s l_t$, $h_{r,s,t} = h_r h_s h_t$ ve $\theta_{r,s,t}$ notasyonları

$$I_{r,s,t} = \{(j,k,l): j_{r-1} < j \leq j_r,\ k_{s-1} < k \leq k_s \text{ ve } l_{t-1} < l < l_t\},$$

$$q_r = \frac{j_r}{j_{r-1}}, q_s = \frac{k_s}{k_{s-1}}, q_t = \frac{l_t}{l_{t-1}} \text{ ve } q_{r,s,t} = q_r q_s q_t$$

ile gösterilebilir. $D \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_3^{\theta}(D) = lim_{r,s,t} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left|\left\{(j,k,l) \in I_{r,s,t}: (j,k,l) \in D\right\}\right|$$

limitinin var olması koşuluyla ifadesinin değerine $\theta_{r,s,t}$-yoğunluğu denir.

Tanım 2.4. ([17]) θ bir lacunary dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$lim_r \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r: \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{5}$$

ifadesi sağlanırsa o zaman $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine, çoklu L nin asimptotik lacunary istatistiksel denkliği adı verilir ($x \sim^{S_\phi^L} y$ ile gösterilir) ve eğer $L = 1$ ise basit asimptotik lacunary istatistiksel denktir denir.

Tanım 2.5. θ bir lacunary dizi olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisine

$$lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| = 0, \tag{6}$$

olması koşuluyla çoklu L nin kuvvetli asimptotik lacunary denkliğidir denir ($x \sim^{N_\theta^L} y$ ile gösterilir). Burada eğer $L = 1$ ise kuvvetli basit asimptotik lacunary denktir olarak adlandırılır.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçları verebiliriz.

3. Bulgular

İkinci bölümde verilen tanımları ve sonuçları dikkate alarak, bu kısımda Orlicz fonksiyonu, lacunary ve üç indisli dizilerin yardımıyla bazı asimptotik denklik kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri veren bazı kapsama bağıntıları elde edilmiştir.

Tanım 3.1. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_3\left(\left\{(r,s,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}: j \le r, k \le s, l \le t, \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \ge \varepsilon\right\}\right) = 0 \tag{7}$$

ifadesi sağlanırsa o zaman üç indisli $x = \left(x_{jkl}\right)_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ ve $y = (y_{jkl})_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ dizilerine çoklu L nin asimptotik istatistiksel ϕ-denkliği denir ($x \sim^{S_\phi^L} y$ ile gösterilir). Burada eğer $L = 1$ ise basit asimptotik istatistiksel ϕ-denktir olarak adlandırılır.

Tanım 3.2. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ de bir lacunary üç indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$lim_{r,s,t} \frac{1}{h_{r,s,t}}\left|\left\{(j,k,l) \in I_{r,s,t}: j \le r, k \le s, l \le t, \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ifadesi sağlanırsa o zaman üç indisli $x = \left(x_{jkl}\right)_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ ve $y = (y_{jkl})_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ dizilerine çoklu L nin asimptotik lacunary istatistiksel ϕ-denkliği denir ($x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$ ile gösterilir). Burada $L = 1$ ise basit asimptotik lacunary istatistiksel ϕ-denktir olarak adlandırılır.

Ayrıca, $S_{\theta_3}^L(\phi)$ kümesi, $x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$ olacak şekilde tüm x ve y dizilerinin kümesini gösterir.

Tanım 3.3. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üç indisli dizi olsun. Eğer

$$lim_{r,s,t} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) = 0 \tag{8}$$

ifadesi sağlanırsa o zaman üç indisli $x = \left(x_{jkl}\right)$ ve $y = (y_{jkl})$ dizilerine çoklu L nin asimptotik lacunary ϕ-denkliği denir ($x \sim^{N_\phi^L - \theta_3} y$ ile gösterilir). Burada $L = 1$ ise güçlü basit asimptotik lacunary ϕ-denktir olarak adlandırılır.

Ayrıca, $N_\phi^L - \theta_3$ ifadesi $x \sim^{N_\phi^L - \theta_3} y$ olacak şekilde tüm x ve y dizilerinin kümesini gösterir.

Teorem 3.4. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üç indisli dizi olsun. O zaman

(i) Eğer $x \sim^{N_\phi^L - \theta_3} y$ ise $x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$ dir ve bu $N_\phi^L - \theta_3$ ifadesi $S_{\theta_3}^L(\phi)$ in uygun bir altkümesidir;

(ii) Eğer $x, y \in \ell_\infty^3$ ve $x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$ ise, o zaman $x \sim^{N_\phi^L - \theta_3} y$ dir;

(iii) $S^{L}_{\theta_3}(\phi) \cap \ell^3_\infty = N^L_\phi - \theta_3 \cap \ell^3_\infty$ dur.

İspat. (i) Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x \sim^{N^L_\phi - \theta_3} y$ ise, o zaman

$$\sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \sum_{\substack{(j,k,l)\in I_{r,s,t} \\ \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)\geq\varepsilon}} \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)$$

$$\geq \varepsilon \left|\left\{(j,k,l) \in I_{r,s,t} : \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right|.$$

dir. Buradan, $x \sim^{S^L_{\theta_3}(\phi)} y$ elde edilir.
$N^L_\phi - \theta_3 \subset S^L_{\theta_3}(\phi)$ olduğunu kabul edelim. $x = (x_{jkl})$ ve $y = (y_{jkl})$ üç indisli dizileri

$$x_{jkl} = \begin{cases} jkl, & \text{eğer } j_{r-1} < j \leq j_{r-1} + \left[\sqrt{h_r}\right], k_{s-1} < k \leq k_{s-1} + \left[\sqrt{h_s}\right] \\ & , l_{t-1} < l \leq l_{t-1} + \left[\sqrt{h_t}\right], r,s,t = 1,2,3,\ldots \\ 0, & \text{diğerleri} \end{cases}$$

ve her $j,k,l \in \mathbb{N}$ için

$$y_{jkl} = 1$$

olacak şekilde tanımlansın. O zaman bu iki dizi $x \sim^{S^L_{\theta_3}(\phi)} y$ ifadesini gerçekler fakat $x \sim^{N^L_\phi - \theta_3} y$ ifadesini sağlamaz. Bu ise istenileni vermektedir.
(ii) $x = (x_{jkl})$ ve $y = (y_{jkl})$ dizileri ℓ^3_∞ uzayında ve $x \sim^{S^L_{\theta_3}(\phi)} y$ olsun. O zaman her j,k,l için

$$\phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \leq M$$

olduğunu kabul edelim. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)$$

$$= \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j,k,l)\in I_{rst} \\ \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)\geq\varepsilon}} \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)$$

$$+ \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j,k,l)\in I_{rst} \\ \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)<\varepsilon}} \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right)$$

$$\leq \frac{M}{h_{rst}} \left|\left\{(j,k,l) \in I_{rst} : \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $x \sim^{N^L_\phi - \theta_3} y$ olduğunu gösterir.

(iii) Bu kısım (i) ve (ii) nin direkt bir sonucudur.

Teorem 3.5. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$, $\liminf q_{r,s,t} > 1$ ile bir lacunary üç indisli dizi olsun. O zaman $x \sim^{S_\phi^L} y$ ise $x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$ dir.

İspat. İlk olarak $\liminf q_{r,s,t} > 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman yeterince büyük r, s, t için $q_{r,s,t} \geq 1 + \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ mevcuttur. Bu ise

$$\frac{h_{r,s,t}}{k_{r,s,t}} \geq \frac{\gamma}{\gamma + 1}$$

dir. Eğer $x \sim^{S_\phi^L} y$ ise, o zaman her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r, s, t için,

$$\frac{1}{k_{r,s,t}} \left| \left\{ j \leq j_r, k \leq k_s, l \leq l_t : \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L \right) \geq \varepsilon \right\} \right|$$
$$\geq \frac{1}{k_{r,s,t}} \left| \left\{ (j,k,l) \in I_{r,s,t} : \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L \right) \geq \varepsilon \right\} \right|$$
$$\geq \frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left| \left\{ (j,k,l) \in I_{r,s,t} : \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L \right) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.6. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ ise $\sup q_{r,s,t} < \infty$ ile bir lacunary üç indisli dizi olsun. O zaman

$$x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y \text{ ise } x \sim^{S_\phi^L} y$$

dir.

İspat. Eğer $\mathbf{\lim} \boldsymbol{sup_{r,s,t} q_{r,s,t}} < \infty$ ise, o zaman her $\boldsymbol{r, s, t} \geq 1$ için $q_{r,s,t} < C$ olacak şekilde bir $C > 0$ mevcuttur. $x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$ olduğunu kabul edelim ve

$$F_{r,s,t} = \left| \left\{ (j,k,l) \in I_{r,s,t} : \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L \right) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

olsun. Her $r, s, t \geq H$ için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \left| \left\{ (j,k,l) \in I_{r,s,t} : j \leq r, k \leq s, l \leq t, \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L \right) \geq \varepsilon \right\} \right| = \frac{F_{r,s,t}}{h_{r,s,t}} < \varepsilon$$

olacak şekilde $H > 0$ mevcuttur. Bu yüzden

$$\text{her } r > r_0, s > s_0, t > t_0 \text{ için } \frac{F_{r,s,t}}{h_{r,s,t}} < K \tag{9}$$

olacak şekilde pozitif $r_0, s_0, t_0 \in \mathbb{N}$ tamsayılarını seçelim.

$$F = \max\{F_{r,s,t} : 1 \leq r \leq r_0, 1 \leq s \leq s_0, 1 \leq t \leq t_0\}$$

ve p, q, r de $j_{r-1} < p \leq j_r, k_{s-1} < q \leq k_s$ ve $l_{t-1} < r \leq l_t$ koşullarını gerçekleyen herhangi üç tamsayı olsun. Burada $r, s, t > H$ dır. O zaman

$$\frac{1}{pqr}\left|\left\{j \leq p, k \leq q, l \leq r: \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left|\left\{j \leq j_r, k \leq k_s, l \leq l_t: \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$= \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left|\left\{(j,k,l) \in I_{1,1,1}: \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$+\frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left|\left\{(j,k,l) \in I_{2,2,2}: \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$+\ldots+\frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left|\left\{(j,k,l) \in I_{r,s,t}: \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$=\frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left\{F_{1,1,1} + F_{2,2,2} + \cdots + F_{r_0,s_0,t_0} + F_{r_0+1,s_0+1,t_0+1} + \cdots + F_{r,s,t}\right\}$$
$$=\left(\frac{F}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\right) r_0 s_0 t_0 + \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left\{h_{r_0+1,s_0+1,t_0+1}\left(\frac{F_{r_0+1,s_0+1,t_0+1}}{h_{r_0+1,s_0+1,t_0+1}}\right) + \cdots + h_{r,s,t}\frac{F_{r,s,t}}{h_{r,s,t}}\right\}$$
$$=\left(\frac{F}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\right) r_0 s_0 t_0 + \frac{1}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\left(\sup_{r>r_0,s>s_0,t>t_0}\left(\frac{F_{r,s,t}}{h_{r,s,t}}\right)\right)\left\{h_{r_0+1,s_0+1,t_0+1} + \cdots + h_{r,s,t}\right\}$$
$$\leq \left(\frac{F}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\right) r_0 s_0 t_0 + K\left(\frac{j_r k_s l_t - j_{r_0} k_{s_0} l_{t_0}}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\right) \qquad \big((9) \text{ dan}\big)$$
$$\leq \left(\frac{F}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\right) r_0 s_0 t_0 + K q_{r,s,t}$$
$$\leq \left(\frac{F}{j_{r-1}k_{s-1}l_{t-1}}\right) r_0 s_0 t_0 + KC$$

elde edilir. Burada $p \to \infty, q \to \infty, r \to \infty$ iken sırasıyla $j_{r-1} \to \infty$, $k_{s-1} \to \infty$, $l_{t-1} \to \infty$ olduğundan

$$\lim \frac{1}{pqr}\left|\left\{j \leq p, k \leq q, l \leq r: \phi\left(\frac{x_{jkl}}{y_{jkl}} - L\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $x \sim^{S_\phi^L} y$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.7. $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir Orlicz fonksiyonu ve $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ ise $1 < \inf q_{r,s,t} \leq \sup q_{r,s,t} < \infty$ ile bir lacunary dizisi olsun. O zaman

$$x \sim^{S_\phi^L} y = x \sim^{S_{\theta_3}^L(\phi)} y$$

olur.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.5 ve 3.6 dan elde edilir.

4. Sonuç ve Yorum

Bu makalede, üç indisli diziler için asimptotik olarak istatistiksel ϕ-denk ve asimptotik olarak lacunary istatistiksel ϕ-denk kavramları tanımlanmıştır ve bu yeni notasyonlar arasındaki ilişkiler de verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar toplanabilme teorisi alanında yapılan çalışmaların da bir devamı niteliğindedir.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Mualla Birgül Huban: Araştırma, Kavramsallaştırma, Doğrulama, Orijinal Taslak Yazımı

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak, çalışmanın okunabilirliğinin gelişmesine katkı sağlayan hakemlere teşekkür ederim.

Çatışma Beyanı

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir çatışma beyanımın bulunmadığını bildiririm.

Etik Kurul Onayı ve/veya Aydınlatılmış Onam Bilgileri

Bu çalışmanın yazarı olarak herhangi bir etik kurul onayı ve/veya aydınlatılmış onam bilgileri beyanım bulunmamaktadır.

Kaynakça

[1] A. Esi, E. Savaş, "On lacunary statistically convergent triple sequences in probabilistic normed space," *Appl. Math. Inf. Sci*., 9 (5), 2529-2534, 2015.

[2] H. Fast, "Sur la convergence statistique," *Colloq. Math*., 2, 241-244, 1951.

[3] J. A. Fridy, "On statistical convergence," *Analysis (Munich)*, 5, 301-313, 1985.

[4] M. Gürdal, "Some types of convergence", PhD. Thesis, Süleyman Demirel Univ., Isparta, Turkey, 2004.

[5] M. Gürdal, M. B. Huban, "On I-convergence of double sequences in the topology induced by random 2-norms," *Mat. Vesnik*, 66, 73-83, 2014.

[6] M. Gürdal, M. B. Huban, "Statistical convergence and C^*-operator algebras," *Theory Appl. Math. Comput. Sci*., 7 (2), 41-50, 2017.

[7] M. B. Huban, M. Gürdal, "Wijsman lacunary invariant statistical convergence for triple sequences via Orlicz function," *J. Classical Anal*., 2021, in press.

[8] M. B. Huban, M. Gürdal, H. Baytürk, "On asymptotically lacunary statistical equivalent triple sequences via ideals and Orlicz function," *Honam Math. J*., 2021, in press.

[9] M. Gürdal, A. Şahiner, "Extremal I-limit points of double sequences," *Appl. Math. E-Notes*, 8, 131-137, 2008.

[10] B. Hazarika, V. Kumar, "On asymptotically double lacunary statistical equivalent sequences in ideal context," *J. Inequal. Appl*.,543, 1-15, 2013.

[11] M. B. Huban, M. Gürdal, E. Savaş, "I-statistical limit superior and I-statistical limit inferior of triple sequences", *7th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2020), Proceeding Book of ICRAPAM (2020)*, Bodrum/Muğla, 2020, 42-49.

[12] J. Li, "Asymptotic equivalence of sequences and summability," *Internat J. Math. Math. Sci.*, 20 (4), 749-758, 1997.

[13] M. Marouf, "Asymptotic equivalence and summability," *Internat J. Math. Math. Sci*., 16 (4), 755-762, 1993.

[14] M. Mursaleen, O. H. Edely, "Statistical convergence of double sequences," *J. Math. Anal. Appl*., 288, 223-231, 2003.

[15] A. A. Nabiev, E. Savaş, M. Gürdal, "Statistically localized sequences in metric spaces," *J. Appl. Anal. Comput*., 9 (2), 739-746, 2019.

[16] R. F. Patterson, "On asymptotically statistically equivalent sequences," *Demonstr. Math*., 36 (1), 149-153, 2003.

[17] R. F. Patterson, E. Savaş, "On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences," *Thai J. Math*., 4 (2), 267-272, 2006.

[18] I. P. Pobyvanets, "Asymptotic equivalence of some linear transformations defined by a nonnegative matrix and reduced to generalized equivalence on the sense of Cesaro and Abel," *Mat. Fiz*., 28 (123), 83-87, 1980.

[19] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Applications of Orlicz spaces* (Book style). Marcel Dekker Inc., 2002.

[20] A. Şahiner, M. Gürdal, F. K. Düden, "Triple sequences and their statistical convergence," *Selçuk J. Appl. Math*., 8 (2), 49-55, 2007.

[21] T. Šalát, “On statistically convergent sequences of real numbers,” *Math. Slovaca*, 30 (2), 139-150, 1980.
[22] R. Savaş, “Multiple $\lambda\mu$ -statistically convergence via ϕ -functions,” *Math. Meth. Appl. Sci*., doi: 10.1002/mma. 7027, 1-8, 2020.
[23] R. Savaş, “Matrix characterization of asymptotically deferred equivalent sequences,”,*Ouaest. Math.*, doi: 10.2989/16073606.2020.1829151, 2020.
[24] I. J. Schoenberg, “The integrability of certain functions and related summability methods,” *Amer. Math. Monthly*., 66, 361-375, 1959.
[25] E. Savaş, R. F. Patterson, “An extension asymptotically lacunary statistical equivalent sequences,”*Aligarh Bull. Math*., 27 (2), 109-113, 2008.
[26] U. Yamancı, M. Gürdal, “On lacunary ideal convergence in random n-normed space,” *J. Math.*, Article ID 868457, v. 2013, 8 pages, 2013.
[27] U. Yamancı, M. Gürdal, “I-statistical convergence in 2-normed space,” *Arab J. Math. Sci.*, 20 (1), 41-47, 2014.
[28] U. Yamancı, M. Gürdal, “On asymptotically generalized statistical equivalent double sequences via ideals,” *Electron. J. Math. Anal. Appl*., 3 (1), 89-96, 2015.