DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ
Cilt: 13 Sayı:1 sh.1-8 Ocak 2011

BİR KAMPÜS AĞINDA ACİL TELEFON MERKEZLERİ YERLEŞTİRİLMESİ PROBLEMİNİN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

(MATHEMATICAL MODELLING OF PLACEMENT OF EMERGENCY PHONE CENTRES IN A CAMPUS NETWORK)

Pınar DÜNDAR*, Mehmet Ali BALCI, Elgin KILIÇ

ÖZET/*ABSTRACT*

Bir G grafında, seçilen bazı tepeler yardımıyla grafın tüm ayrıtlarını tanımlama graf örtüsü problemi olarak bilinir. Başka bir açıdan bakıldığında örtü problemi; sayılabilir bir küme üzerinde verilmiş bir bağıntıyı, bu kümenin minimum sayıda elemanını kullanarak tanımlama olarak düşünülebilir. Optimizasyon teorisinde; bir G grafının örtü kümeleri içinden en az elemanlısını bulmaya minimal örtü problemi adı verilir. Bu problem literatürde bir discrete optimizasyon problemi olarak bilinmektedir. Problem doğrusal programlama ile matematiksel olarak ifade edilebilir. Bu çalışmada iletişim ağı grafla modellenerek, bu ağda ilişkileri minimum sayıda elemanla tanımlayan graf örtüsü problemi ele alınmıştır. Örtü probleminin genel doğrusal programlama modeli verilerek çözüm araştırılmıştır. Daha sonra uygulama problemi olarak ele alınan, Ege Üniversitesi Kampüsünde güvenliği sağlamak amacıyla acil telefonlarının yerleştirilmesi problemi, bir örtü problemi olarak modellenmiştir. Elde edilen doğrusal programlama problemi WQSB programı yardımı ile çözülüp minimum sayıda hangi noktalara telefon yerleştirilmesi gerektiği hesaplanmıştır.

In this study graph set covering problem which is a problem of defining relations in a network by using less number of objects, is examined by the aid of graphs that are used mostly in design of communication networks. Cover problem is also known as the distinct optimization problem in this field of study. The problem of placement of emergency phones in Ege University Campus to provide security is considered as a cover problem. The obtained linear programming problem is solved by WQSB and the result that at least number of places which a phone is required to be placed, is found.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Matematiksel modelleme, Ayrık optimizasyon,Graf teori, Ağ yapıları
Mathematical modelling, Discrete optimization, Graph theory, Network structure

---

* Ege Üniversitesi, Fen Fak., Matematik Bölümü, 35100 Bornova, İZMİR

1. GİRİŞ

Matematiğin bir dalı olan graf teori, günlük yaşamda karşılaşılan pek çok olayın matematiksel modellerinin oluşturulmasına ve bu modellerin bilinen yöntemlerden farklı başka tekniklerle kolayca çözülmesine olanak tanır. Graf teori, sayılabilir nesneler arasındaki ilişkilere dayanır. Matematiksel olarak ifade edilirse, yönlendirilmemiş bir G grafı, elemanları tepeler olarak adlandırılan bir V kümesi ile V deki tepelerin sıralı olmayan ikililerinin meydana getirdiği E kümesinden oluşur. E' nin elemanlarının her biri bir ayrıt olarak adlandırılır. Bir ayrıt e=(u,v) biçiminde gösterilir. Burada u ile v tepelerine bitişik tepeler denir. Ayrıca e ayrıtı da u ve v tepesi ile bitişiktir. Bitişik tepeler komşu tepeler olarak da adlandırılır. Genel olarak bir G grafı, VxV kümesi üzerinde tanımlı 2-li bir bağıntının gösterim biçimidir. Graf teoride bağıntının tanımı büyük önem taşımaktadır. Bağıntının özelliklerine göre farklı türde graf modelleri, farklı çözüm teknikleri ve çözüm algoritmaları bulunmaktadır. (West, 2001)

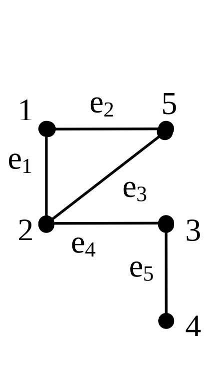
Graflar temel olarak birleştirilmiş ve birleştirilmemiş graflar biçiminde iki sınıfa ayrılmaktadır. Bir G grafında her tepe çifti arasında en az bir iletişim varsa bu grafa birleştirilmiş graf denir. Bir grafta en az bir tepe çifti bu özelliği sağlamıyorsa bu grafa birleştirilmemiş graf denir. Her tür iletişim ağı, birleştirilmiş grafların herhangi biri ile modellenerek, bu ağlar üzerindeki problemler bu ağların modelleri olan graflar üzerinde çözülür.

Sayılabilir bir kümenin elemanları arasındaki bir ilişki, matematiksel olarak bir bağıntıdır. Kümenin sonlu sayıdaki elemanları grafın tepelerini, bağıntının ikilileri grafın ayrıtlarını tanımlar. Tüm ayrıtları tanımlayan minimum sayıda elemanı bulmak (yani grafın tepelerini bulmak) grafta minimal örtü problemi olarak bilinir. Minimal örtü problemi (set covering problem) bir doğrusal programlama problemidir (Christofides,N.1986). Minimal örtü probleminin doğrusal programlama modelinin koşulları grafın tepe ayrıt bitişiklik matrisi yardımıyla yazılır.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1: Bir *G=(V,E)* grafının tepe ayrıt bitişiklik matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir ve B ile gösterilir. Bu matrisin satırları grafın tepelerine, sütunları ise grafın ayrıtlarına karşılık gelir.

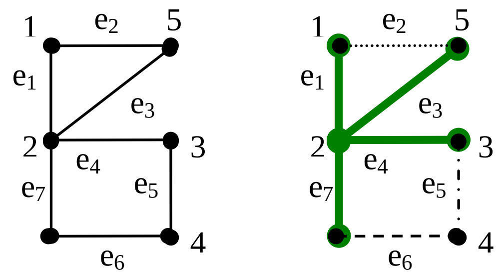
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ eğer } v_i \text{ tepesi } e_j \text{ ayrıtı ile bitişikse} \\ 0, \text{ aksi halde} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 1. Birleştirilmiş bir graf ve onun tepe ayrıt bitişiklik matrisi

Tanım 2.2: G grafının, V tepeler kümesinin bir S alt kümesi için, eğer G deki her bir ayrıtın en az bir ucu S kümesinde ise, S ye G nin bir örtüsü denir. Bir minimal örtü kümesindeki tepelerin sayısı G grafının örtü sayısı olarak adlandırılır ve $\alpha(G)$ ile gösterilir (Chartrand vd., 1986).



Şekil 2. Bir G grafı ve örtü kümesi

Şekil 2'deki G grafının tepeler ve ayrıtlar kümesi sırasıyla

V={1, 2, 3, 4, 5, 6}
E={(1,2), (1,5), (2,3), (2,5), (3,4),(2,6), (4,6)}

olarak verilmiştir. G grafının minimal bir örtü kümesi 2, 4 ve 5 nolu tepelerden oluşur. Bu durumda G grafının örtü sayısı 3' tür.

3. ÖRTÜ KÜMESİ PROBLEMİ

Sayılabilir kümeler üzerinde tanımlı optimizasyon problemleri, günlük yaşamda karşımıza çıkan problemlerdir. Bu tip problemler matematiksel olarak ifade edilebildikleri gibi, elemanları arasındaki ilişki belirlendiğinde kolayca graflarla da modellenebilirler. Bu bölümde Örtü kümesi probleminin genel doğrusal programlama modeli tanımlanmış ve nesneler arasındaki ilişkiler göz önüne alınarak problemin graf modeli kurulmuştur.

3.1. Örtü Probleminin Genel Modeli

n tane nesne içeren bir ortamda örtü kümesi probleminin genel doğrusal programlama modeli,

(i) Karar değişkenleri $$x_j = \begin{cases} 1, & j.\ nesne \text{ seçildiğinde} \\ 0, & aksi \text{ halde} \end{cases}$$

(ii) Kısıtlar

$x_j + x_j \geq 1 \qquad \forall\,(i, j)$ ilişkisi için

(iii) $Z_{min} = \sum_{j=1}^{n} x_j$

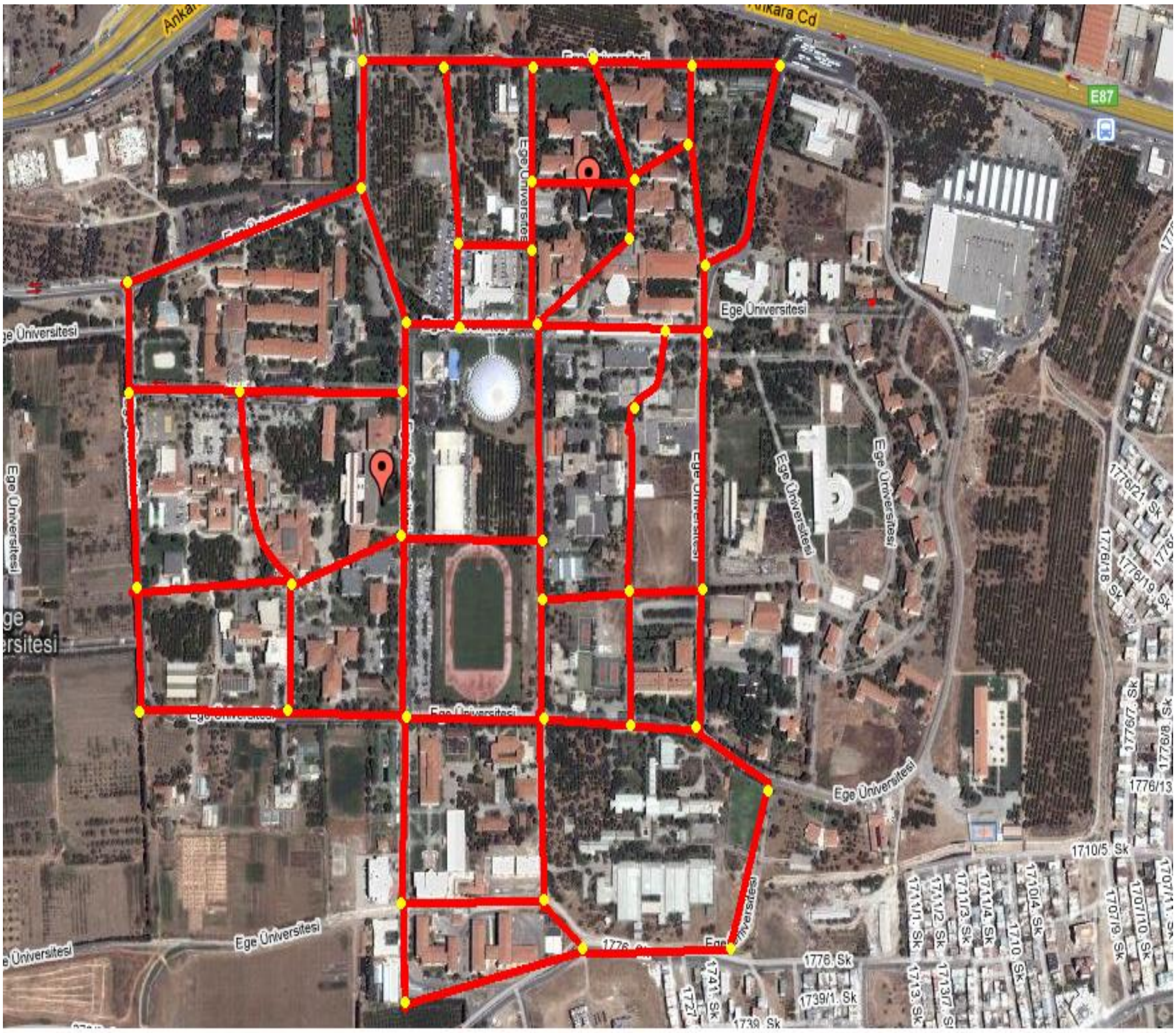
biçimindedir (Beasley, 1987; Beasley vd., 1992).

Bu genel modeli graf ile ilişkilendirdiğimizde, grafın tepe ayrıt bitişiklik matrisi ile tepeler vektörünün çarpımından yukarıdaki modele ulaşılır.

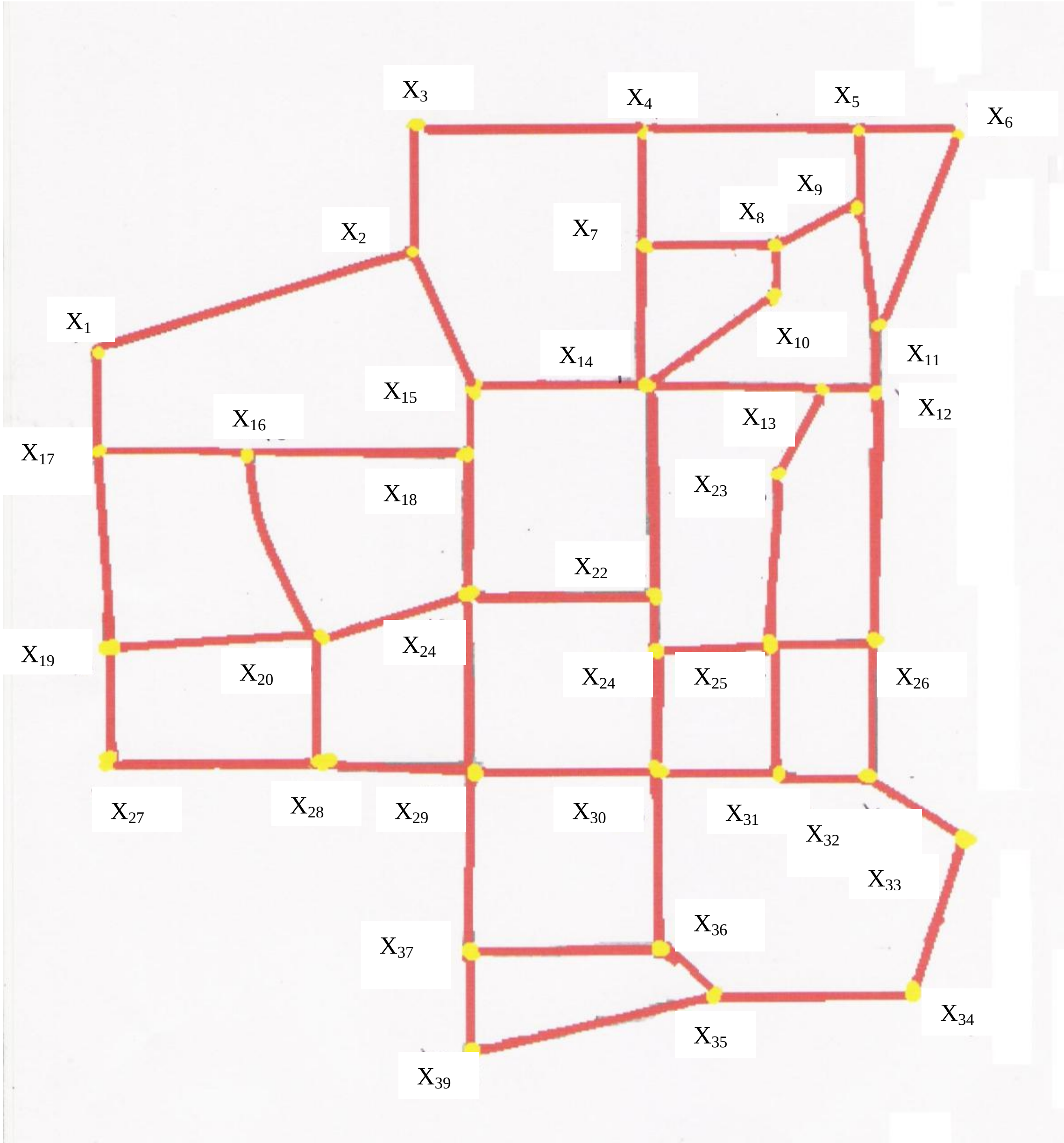
3.2. Ege Üniversitesi Kampüs Ağında Acil Telefonları Yerleştirilmesi Problemi

Bu bölümde Ege Üniversitesinin doğu kampüsü krokisine bağlı kalınarak, her telefon en az bir sokağa hizmet vermek koşuluyla, minimum sayıda telefon kullanılarak kampus güvenliğinin sağlanması problemi; bir doğrusal programlama problemi olarak modellenmiş ve bu model kurulurken kampüsün grafı çizilmiştir.

Şekil 1'de krokisi verilen kampüs ağı bir graf olarak modellendiğinde aşağıdaki graf elde edilir. Bu modellemede sokakların kesim noktası birer tepe x_i ve sokaklar birer ayrıtla belirlenmiştir.



Şekil 1. Ege üniversitesi kampüsünün doğu yakasının krokisi



Şekil 2. Krokisi verilen ağın grafı

Bu probleme ait doğrusal programlama modeli:

$$x_j = \begin{cases} 1, & j.\ \text{telefon konulabilecek nokta seçildiğinde} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Her bir sokağa hizmet verilmesi için, her bir sokağın iki uç noktasından birine veya ikisine de telefon yerleştirilebileceğinden aşağıdaki koşullar ortaya çıkar,

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 + x_2 \geq 1 & x_4 + x_7 \geq 1 & x_{17} + x_{19} \geq 1 & x_{18} + x_{21} \geq 1 & x_{24} + x_{30} \geq 1 & x_{23} + x_{25} \geq 1 \\
x_1 + x_{17} \geq 1 & x_7 + x_{14} \geq 1 & x_{19} + x_{20} \geq 1 & x_{21} + x_{22} \geq 1 & x_{14} + x_{22} \geq 1 & x_{26} + x_{25} \geq 1 \\
x_2 + x_3 \geq 1 & x_8 + x_{10} \geq 1 & x_{16} + x_{20} \geq 1 & x_{29} + x_{30} \geq 1 & x_{11} + x_6 \geq 1 & x_{26} + x_{32} \geq 1 \\
x_3 + x_4 \geq 1 & x_{10} + x_{14} \geq 1 & x_{19} + x_{27} \geq 1 & x_{29} + x_{37} \geq 1 & x_{11} + x_9 \geq 1 & x_{26} + x_{12} \geq 1 \\
x_4 + x_5 \geq 1 & x_{14} + x_{15} \geq 1 & x_{27} + x_{28} \geq 1 & x_{37} + x_{36} \geq 1 & x_{11} + x_{12} \geq 1 & x_{31} + x_{25} \geq 1 \\
x_5 + x_6 \geq 1 & x_2 + x_{15} \geq 1 & x_{20} + x_{21} \geq 1 & x_{37} + x_{38} \geq 1 & x_{14} + x_{13} \geq 1 & x_{30} + x_{31} \geq 1 \\
x_5 + x_9 \geq 1 & x_{15} + x_{18} \geq 1 & x_{20} + x_{28} \geq 1 & x_{38} + x_{35} \geq 1 & x_{12} + x_{13} \geq 1 & x_{32} + x_{31} \geq 1 \\
x_8 + x_9 \geq 1 & x_{16} + x_{18} \geq 1 & x_{28} + x_{29} \geq 1 & x_{35} + x_{36} \geq 1 & x_{23} + x_{13} \geq 1 & x_{32} + x_{33} \geq 1 \\
x_7 + x_8 \geq 1 & x_{16} + x_{17} \geq 1 & x_{21} + x_{29} \geq 1 & x_{30} + x_{36} \geq 1 & x_{24} + x_{25} \geq 1 & x_{33} + x_{34} \geq 1 \\
 & & & & x_{22} + x_{24} \geq 1 & x_{35} + x_{34} \geq 1
\end{array}
$$

Zmin= $\sum_{j=1}^{38} x_j$ biçimindedir.

Yukarıdaki eşitsizlik sistemi problemin graf modeli kullanılarak da oluşturulabilir. Burada grafın tepe ayrıt bitişiklik matrisi ile tepe vektörünün çarpımından aynı yapı elde edilebilir. Bir başka deyişle yukarıdaki eşitsizlikler BX$\geq$1 ile ifade edilir.

$$
BX \geq 1, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,56} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,56} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{38,1} & b_{38,2} & \dots & b_{38,56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{38} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Problemin karar modelinde çözülmesi gereken 56 tane eşitsizlik ve 38 tane bilinmeyen vardır. Problem bilinen yöntemlerden Simpleks ile çözülürse, yöntem gereği eşitsizlikler eşitlik hale getirilmelidir. Bu durumdada sisteme yeni değişkenler eklenir. Problemin çözümünde matris yapıları kullanılacağından ve karar değişken sayısı fazla olduğundan elle çözüm oldukça uzun vakit alacaktır. Bu nedenle, büyük boyutlu problemlerde de kısa sürede çözüm veren WQSB paket programının Lineer and Integer Programming kısmı kullanılmıştır. Bu kısımdaki çözümler Simplex Algoritması kullanılarak yapılmaktadır.

WQSB paket programı ile çözüm yapıldığında aşağıdaki çizelgede yer alan sonuçlar elde edilir. Telefon konulacak noktalar çizelgedeki 1 değerine sahip x_j' lerdir. WQSB programının çıktısı Çizelge 1'de verilmiştir. Çizelgede karar değişkenleri birinci sütunda ve bu karar değişkenlerinin çözüm değerleri ikinci sütunda yer almaktadır. Karar değişkenlerinin 1 değerini alması o noktaya telefon yerleştirileceği anlamına gelmektedir.

Çizelgeye göre x_j=1 değerine sahip yirmi karar değişkeni bulunduğundan, tüm sokaklara hizmet verecek en az telefon sayısının yirmi olduğu bulunmuştur.

WINQSB Çizelge Değerleri Ayrıntıları:

Decision Variable : Karar Değişkenleri (Sokakların uç noktaları)
Solution Value : Karar değişkenlerinin çözüm değerleri (0, 1)
Unit Cost or Profit c(j) : Her bir karar değişkeninin maliyeti
Total Contribution : Amaç fonksiyonuna çözüm değerlerinin katkısı (C_jX_j)
Reduced Cost : Sipleks algoritmasında C_j-Z_j ye karşılık gelen değer

Basis Status : Son Simpleks Çizelgesunda bulunan çözüm değerlerinin, alt sınır veya üst sınır değerinde bir temel değişken olup olmama durumu

C_j : Maliyet, bu problemde 1 olarak alınmıştır.
Z_j: Simplex' in bulduğu bir andaki çözüm değerleri için hesaplanan amaç fonksiyonunun değeri.
Objective Function (Min.) = 20,0000

Çizelge 1. Combined Report for LP Sample Problem

	Karar Değişkeni	Çözüm Değeri		Birim Maliyet		Toplam Katkı veya Kar c(j)		Azaltılmış Maliyet	Esas Durum
1	X1	0		1,0000		0		-2,0000	sınırda
2	X2	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
3	X3	0		1,0000		0		0	esas
4	X4	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
5	X5	1,0000		1,0000		1,0000		1,0000	sınırda
6	X6	0		1,0000		0		1,0000	sınırda
7	X7	0		1,0000		0		0	esas
8	X8	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
9	X9	0		1,0000		0		0	esas
10	X10	0		1,0000		0		1,0000	at bound
11	X11	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
12	X12	1,0000		1,0000		1,0000		1,0000	sınırda
13	X13	1,0000		1,0000		1,0000		1,0000	sınırda
14	X14	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
15	X15	0		1,0000		0		0	esas
16	X16	0		1,0000		0		0	esas
17	X17	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
18	X18	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
19	X19	0		1,0000		0		0	esas
20	X20	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
21	X21	0		1,0000		0		0	esas
22	X22	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
23	X23	0		1,0000		0		0	esas
24	X24	0		1,0000		0		0	esas
25	X25	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
26	X26	0		1,0000		0		0	esas
27	X27	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
28	X28	0		1,0000		0		0	esas
29	X29	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
30	X30	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
31	X31	0		1,0000		0		0	esas
32	X32	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
33	X33	0		1,0000		0		0	esas
34	X34	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
35	X35	0		1,0000		0		0	esas
36	X36	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas
37	X37	0		1,0000		0		0	esas
38	X38	1,0000		1,0000		1,0000		0	esas

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Ağ yapılarında önemli bir kavram olan örtü kümesi problemi bu çalışmada ele alınmıştır.Ege Üniversitesi Kampüsü' nün doğu kısmı incelenerek grafı çizilmiş; bu graf üzerinden problemin matematiksel modeli kurulmuş ve WQSB programı yardımıyla çözüm elde edilmiştir. Toplam 38 noktadan sadece 20 noktaya telefon yerleştirmenin uygun olduğu sonucuna varılmıştır. Benzer türde problemler graf teori yardımı ile kolaylıkla çözülebilir.

Bir grafta örtü sayısı, bulunabilen tüm örtü kümelerinden en az sayıda elemana sahip olan kümenin eleman sayısı olarak tanımlıdır. Problemde yerleştirilmesi gereken acil telefonlarının minimum sayısı grafın örtü sayısına karşılık gelmektedir. Problemin çözümünde graf modeli kullanıldığından ve grafın örtü sayısı hesaplandığından bulunan sonuç optimumdur.

KAYNAKLAR

Beasley J. E. (1987): “An Algorithm for Set Covering Problems, Europen Journal of Operational Research”, 31, s. 85-93.

Beasley J. E., Jörnsten K (1992): “Enhancing an Algorithm for Set Covering Problems”, European Journal of Operational Research, 58, s. 293-300.

Buckley F., Harary F. (1990): “Distance in Graphs”, Addison Wesley Pub., California.

Chartrand G., Leisnak L. (1986): “Graphs & Digraphs”, Wadsworth & Brooks.

Christofides N. ,(1986): “Graph Theory: An Algorithmic Approach”, Academic Press, London.

West D.B. (2001): “Introduction to Graph Theory”, Prentice Hall.