Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019, 12(1),425-436
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of ScienceandTechnology
2019, 12(1), 425-436
DOI: 10.18185/erzifbed.479466
Research Article

Parçalı Düzgün Şebekede Singüler Pertürbe Özellikli Lineer Olmayan Reaksiyon Difüzyon Problemleri İçin Nümerik Çözümler

Hakkı DURU, Baransel GÜNEŞ*

Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Van, Türkiye

Geliş / Received: 06/11/2018, Kabul / Accepted: 28/01/2019

Öz
Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon sınır değer problemi ele alınmıştır. Kalan terimi integral biçiminde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak parçalı düzgün şebeke üzerinde fark şeması kurulmuştur. Sunulan metodun kararlı olduğu gösterilmiş ve yakınsaklık analizi yapılmıştır. Kurulan metodun yaklaşık çözüme düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Nümerik sonuçların teorik sonuçları desteklediği örnek üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel denklem, Fark şeması, Parçalı düzgün şebeke, Singüler pertürbasyon.

2010 Matematik Konu Sınıflandırması: 65L10, 65L11, 65L12

Numerical Solutions For Singularly Perturbed Nonlinear Reaction Diffusion Problems On The Piecewise Equidistant Mesh

Abstract
Singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion boundary value problem is considered in this paper. The difference schemes on a piecewise equidistant mesh which is accomplished by the method of integral identities with the use of linear basis functions and interpolating quadrature rules with weight and remainder term in integral form are presented. The stability and convergence analysis of the method is discussed. Some numerical experiments have been carried out to validate the predicted theory.

Keywords: Differential equation, Difference scheme, Piecewise equidistant mesh, Singular perturbation.

2010 Mathematical Subject Classification: 65L10, 65L11, 65L12

1. Giriş

Bu çalışmada

$$-\varepsilon^2 u''+a(x)u(x)=f(x,u) \qquad (1)$$

$$u(0)=\kappa_0, u(l)=\kappa_1 \qquad (2)$$

singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon sınır değer problemi incelenmiştir. Bu tür problemler; biyoloji, fizik ve kimya gibi bilimin birçok alanındaki araştırma nesnelerinin matematiksel modeli olarak ortaya çıkmaktadır. Bu denklemler; kimyasal reaksiyon modellemeleri, biyolojik sistemler ve nükleer reaktör fiziğindeki çalışmalarda sıcaklık, katalizör, difüzyon oranı vb. çeşitli parametrelerle birlikte değerlendirilmektedir (Mei, 2000).

Kimyasal deney süreçlerinde model oluşumu reaksiyon-difüzyon mekanizmaları ile açıklanmaktadır (Auchmutyi vd., 1976). Oluşturulan kimyasal modellemelerde salınımlı çözümler elde edilmiştir (Ruuth, 1995).

Reaksiyon-difüzyon problemleri gelişim biyolojisinde önemli yer tutmaktadır. Bu

*Sorumlu Yazar: baransel_gunes_91@hotmail.com

bağlamda Alan Turing tarafından ortaya atılan morfogenezde ve morfogeneze bağlı olarak ortaya çıkan durumların kararlılığının değerlendirilmesinde reaksiyon-difüzyon problemlerinden yararlanıldığı görülmektedir (Turing, 1952).

Bu tür denklemler popülasyon modellemelerinde de ortaya çıkmaktadır. Bu konuda J. G. Skellam'a ait "Teorik popülasyonlarda rastgele dağılım" isimli makale dönüm noktası olmuştur (Skellam, 1991). Skellam'ın yaptığı gözlemler ekoloji çalışmalarını derinden etkilemiştir. Skellam, ilk olarak, biyolojik türlerin dağılımından bahsetmiş ve türlerin popülasyon ölçeğinde dağılımı ile reaksiyon-difüzyon denklemi arasında bağlantı kurmuştur. Orta Avrupa'daki misk sıçanlarının popülasyonlarındaki artış için alan verilerini kullanarak bu bağlantının kabul edilebilir olduğunu göstermiştir. Türlerin dağılımını popülasyon dinamikleri ile birleştirerek reaksiyon-difüzyon denklemlerini teorik ekolojide etkili bir biçimde kullanmıştır. Daha sonra, Skellam bir popülasyondaki lineer (Malthusian) ve lojistik büyüme oranları, bir ve iki boyutlu yaşam alanı geometrileri, yaşam alanı ve çevresindeki düzenlemeler için reaksiyon-difüzyon modellerini incelemiştir (Cantrell vd., 2003).

Ek olarak reaksiyon-difüzyon sistemleri, çeşitli modellemeler için düşünülmüştür (cepheler, spiraller, hedefler, altıgenler, şeritler ve dağılma solitonları). Reaksiyon-difüzyon süreçlerinin, biyolojide morfogeneze bağlı süreçler için bir temel olduğu, doku katları ve cilt pigmentasyonu ile ilgili olabileceği tartışılmıştır (Harrison, 1993; Meinhardt, 1982; Murray, 2013). Ekolojik istilalar, salgın yayılımı, tümör büyümesi ve yara iyileşmesi reaksiyon-difüzyon problemlerinin diğer uygulamaları arasında yer almaktadır (Holmes, 1994; Murray, 1986; Chaplain, 1995; Sherratt vd., 1992; Gatenby vd., 1996; Sherratt vd., 1990).

Reaksiyon-difüzyon problemleri ile birçok alanda ilgilenilmesinin nedeni, lineer olmayan diferansiyel denklemler üzerinde çalışılmasına rağmen analitik çözümün değerlendirilmesine imkan sağlamasıdır (Fife, 1979; Mikhailov, 1990; Grindrod, 1991; Smoller, 1994; Kerner vd., 1994).

Bu çalışmada ele alınan singüler pertürbe özellikli problem çözüm fonksiyonunun hızlı değiştiği sınır katmanları içermektedir. Sınır katmanı içeren problemlerde klasik fark şemaları, türev sınırsız olduğundan kararlı olmaz. Bu tür problemlerde bu duruma çözüm üretebilmek için uygulanan yöntemlerden birisi de fark şemasının kurulumunda parçalı düzgün şebekenin kullanılmasıdır. Bu makalenin araştırma konusu olan singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemleri için fark şeması parçalı düzgün şebekede kurulmaktadır. Bu fark şemasını kurarken kalan terimi integral şeklinde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları uygulanmaktadır. Yaklaşık çözümün kesin çözüme yaklaşım oranı $O(N^{-1})$ olarak tespit edilmiştir.

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde bazı temel tanım ve kurallar verilecektir. Parçalı düzgün şebeke üzerinde fark şeması kurmak için kalan terimi integral biçiminde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kurallarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bağlamda fark şemasının kurulumunda gerekli kuadratür kuralları ve notasyonlar verilecektir. Benzer şekilde gerekli diferansiyel ve integral eşitsizlikleri de belirtilecektir.

Lemma 1. $p(x)$ integrallenebilen (ağırlık fonksiyonu) ve σ bir reel parametre olmak üzere, aşağıdaki interpolasyon kuadratür formülleri doğrudur:

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = [\int_a^b p(x)dx]\{\sigma f(b) + (1-\sigma)f(a)\}$$

$$+f[a;b]\int_a^b \left(x - x^{(\sigma)}\right)p(x)dx + R(f) \quad (3)$$

$$R(f) = \int_a^b dxp(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K^*{}_{n-1}(x,\xi)d\xi, n = 1\ ya\ da\ 2,$$

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \qquad s = 0{,}1,$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a,\ f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!}, \qquad \lambda \geq 0, \qquad T_s(\lambda) = 0, \qquad \lambda < 0.$$

Bazı durumlarda (3) formülündeki ikinci terim kalan terime eklenebilir:

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b p(x)dx + R^*(f) \quad (4)$$

$$R^*(f) = \int_a^b dxp(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)\, K^*{}_{n-1}(x,\xi)d\xi$$

$$+(n-1)f[a,b]\int_a^b (x - \tfrac{a+b}{2})p(x)dx,\ n = 1\ veya\ 2,$$

$$K_n(x,\xi) = T_n(x-\xi) - T_n\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right)$$

$$+(b-a)^{-1}(b-\xi)^s\left(\frac{a+b}{2} - x\right), \qquad s = 0{,}1.$$

Ek olarak

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f[a;b]\int_a^b p(x)dx + \bar{R}(f),$$

$$\bar{R}(f) = -\int_a^b dxp'(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi\ , n = 1{,}2$$

formülü de yazılabilir. (3) ve (4) formüllerinde belirtilen $K_s(x,\xi)$ fonksiyonu

$$K_0(a,\xi) = K_0(b,\xi) = 0,$$

$$K_1(a,\xi) = K_1(b,\xi) = K_1(x,a) = K_1(x,b) = 0,$$

$$K_1(x,\xi) = K_1(\xi,x),$$

$$\frac{d}{dx}K_1(x,\xi) = K_0(\xi,x)$$

şeklinde ifade edilir (Amiraliyev, 1995).

3. Asimptotik Değerlendirmeler

Lineer olmayan (1)-(2) problemi için Taylor açılımından

$$f(x,u) = f(x,0) + \frac{\partial f(x,\tilde{u})}{\partial u}u$$

yazılır. Burada $\tilde{u} = \gamma u$, $0 < \gamma < 1$ alınmaktadır. Ayrıca $F(x) = f(x,0)$ ve $b(x) = \frac{\partial f(x,\tilde{u})}{\partial u}$ olarak kabul edelim. Bu taktirde

$$-\varepsilon^2 u'' + [a(x) - b(x)]u = F(x)$$

olur.

$$A(x) = a(x) - b(x)$$

dersek

$$-\varepsilon^2 u'' + A(x)u = F(x) \tag{5}$$

yazabiliriz.

Burada

$$A(x) = a(x) - \frac{\partial f(x,\tilde{u})}{\partial u} \geq \alpha > 0$$

$$F(x) = f(x,0) \geq 0$$

şartı sağlansın. Asimptotik değerlendirmeler için aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 2. Herhangi bir $v(x)$ fonksiyonu

$$Lv = F(x) \geq 0$$

$\kappa_0 \geq 0$, $\kappa_1 \geq 0$ şartlarını sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda $v(x) \geq 0$ olur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. Lemmanın ispatı için $v(x_0) = 0$, $v(x_1) = 0$ ve $x \in (x_0, x_1) \subset (0, l)$ için $v(x_0) \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Burada

$$v''(\xi) = \frac{v(x_0) - 2v(\frac{x_0+x_1}{2}) + v(x_1)}{(\frac{x_1-x_0}{2})^2} \geq 0$$

olur. Bu, $x \in (x_0, x_1)$ için $Lv < 0$ ve $v(x) < 0$ olması demektir. Bu da hipotezle çelişir. Öyleyse lemma doğrudur.

Lemma 3. Herhangi $v(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$ fonksiyonu için

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \; 0 \leq x \leq l \tag{6}$$

değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. Lemmanın ispatı için

$$\psi(x) = \pm v(x) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \qquad 0 \leq x \leq l$$

bariyer fonksiyonunu göz önüne alalım. Sınır şartları için

$$\psi(0) = \pm v(0) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)|, \qquad 0 \le x \le l$$

ifadelerinden $\psi(0) \ge 0$ ve

$$\psi(l) = \pm v(l) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |Lv(s)|, \qquad 0 \le x \le l$$

ifadesinden $\psi(l) \ge 0$ olduğu görülür. Böylece $L\psi(x) \ge 0$ olur. Buradan $\psi(x) \ge 0$ olur. (1) gereği (6) ifadesinin doğruluğu ispatlanmış olur.

Lemma 4.

$$-\varepsilon^2 u'' + A(x)u(x) = F(x),\ 0 < x < l$$

$$u(0) = \kappa_0\,, \qquad u(l) = \kappa_1$$

probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$|u(x)| \le C, 0 < x < l\,;\, A(x), F(x) \in C[0, l] \tag{7}$$

$$|u'(x)| \le C\left\{1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon}}\right)\right\}, 0 < x < l,\ A(x),\ F(x) \in C[0, l] \tag{8}$$

(Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. Önce $|u(x)| \le C$ olduğunu gösterelim. (2) ifadesinden

$$|u(x)| \le |\kappa_0| + |\kappa_1| + \alpha^{-1} \max_{0 \le s \le l} |F(s)|$$

olur. Böylece $|u(x)| \le C$ sağlanır. Şimdi (8) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. Şimdi (1) denkleminde (7) ifadesini dikkate alırsak;

$$|u''(x)| = -\frac{1}{\varepsilon^2}|F(x) - A(x)u(x)| \le \frac{C}{\varepsilon^2},\ 0 < x < l \tag{9}$$

yazılabilir. Daha sonra $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ için değerlendirmeler almamız gerekir. Bunun için aşağıdaki diferansiyelleme formülünden yararlanılır:

$$g'(x) = g(\alpha_0; \alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi\,, \qquad g \in C^2, \alpha_0 \le x \le l.$$

Bu formülde $g(x) = u(x)$, $x = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \varepsilon$ yazarsak

$$|u'(0)| = \left|\frac{u(\varepsilon) - \kappa_0}{\varepsilon}\right| \le \frac{C}{\varepsilon} \tag{10}$$

olur. Aynı şekilde $g(x) = u(x)$, $x = l$, $\alpha_0 = l - \varepsilon$, $\alpha_1 = l$ alırsak;

$$|u'(l)| = \left|\frac{\kappa_1 - u(l - \varepsilon)}{\varepsilon}\right| \le \frac{C}{\varepsilon} \tag{11}$$

olur. Daha sonra (5) diferansiyel denkleminin türevi alınırsa,

$$-\varepsilon^2 u'' + A(x)u(x) = F(x)$$

$$-\varepsilon^2 u''' + A'(x)u(x) + A(x)u'(x) = F'(x)$$

elde edilir.

$$w(x) = u'(x)$$

ve

$$\varphi(x) = F'(x) - [A'(x)u(x) + A(x)u'(x)]$$

dersek

$$Lw(x) = \Phi(x) \tag{12}$$

olur. Ayrıca (10) ve (11) ifadelerinden

$$w(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), w(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{13}$$

olur. (12)-(13) lineer probleminin çözümü $w(x) = w_0(x) + w_1(x)$ şeklinde arayabiliriz. Burada $w_0(x)$ ve $w_1(x)$ fonksiyonları

$$Lw_0 = \Phi(x), \qquad 0 < x < l$$

$$w_0(0) = w_0(l) = 0 \tag{14}$$

ve

$$Lw_1 = 0, \qquad 0 < x < l$$

$$w_1(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \ \ w_1(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{15}$$

problemlerinin çözümüdür. (14) probleminin çözümü sınır şartlarına göre

$$|w_0(x)| \leq \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |\Phi(s)|$$

olur. Dolayısıyla $\Phi(x)$ fonksiyonu ε'a göre düzgün sınırlı olduğundan

$$|w_0(x)| \leq C, \ 0 < x < l \tag{16}$$

elde edilir. Şimdi ise (15) problemine maksimum prensibi uygulanırsa;

$$|w_0(x)| \leq \Lambda(x) \tag{17}$$

alabiliriz. Burada $\Lambda(x)$ fonksiyonu aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$-\varepsilon^2\Lambda'' + \alpha\Lambda = F(x), \qquad 0 < x < l$$
$$\Lambda(0) = |w_1(0)|, \ \ \Lambda(l) = |w_1(l)| \tag{18}$$

Sabit katsayılı (18) probleminin çözümü açık olarak

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}l}{\varepsilon})}\left\{|w_1(0)|\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon} + |w_1(l)|\sinh(\frac{\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon})\right\}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\Lambda(x) \leq \frac{C}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon}}\right\} \tag{19}$$

olduğu kolayca görülür. Bu da lemmanın doğruluğunun ispatıdır.

4. Parçalı Düzgün Şebekede Fark Şemasının Kurulması

Bu bölümde lineer olmayan (1)-(2) reaksiyon difüzyon problemi için parçalı düzgün şebekede fark şeması kurulacaktır. Burada

$$\varpi_N = \{0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = l\}$$

ayrık noktalar kümesine düzgün olmayan şebeke, x_i noktalarına düğüm noktaları denir. $h_i = x_i - x_{i-1}$ şebeke adımıdır. u fonksiyonu bu şebekede tanımlı şebeke fonksiyonu olmak üzere

$$u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}$$

ifadelerine sırayla ileri fark türevi ve geri fark türevi denir. $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$ olmak üzere

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{\hbar_i}\left(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}\right)$$

ifadesine de ikinci mertebe fark türevi denir (Samarskii, 2001).
Lineer olmayan (1)-(2) problemi için ϖ_N şebekesi üzerinde fark şeması kuralım. Bunun için bu diferansiyel denklemin her iki tarafını φ_i baz fonksiyonu ile çarpıp x_{i-1}'den x_{i+1}'e integral alalım. Buradan

$$\hbar_j^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu\varphi_i dx = \hbar_j^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(-\varepsilon^2 u'' + a(x)u(x)\right)\varphi_i dx = \hbar_j^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x,u)\varphi_i dx$$

elde ederiz. Burada φ_i baz fonksiyonu

$$\varepsilon^2 {\varphi_i^{(1)}}'' = 0, \;\; \varphi_i^{(1)}(x_i) = 1, \varphi_j^{(1)}(x_{i-1}) = 0$$
$$\varepsilon^2 {\varphi_i^{(2)}}'' = 0, \;\; \varphi_i^{(2)}(x_i) = 1, \varphi_j^{(2)}(x_{i+1}) = 0$$

problemlerinin çözümü olan

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} = \dfrac{(x - x_{i-1})}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \varphi_i^{(1)} = \dfrac{(x_{i+1} - x)}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

fonksiyonudur. Ayrıca

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx = \hbar_i^{-1}\left(\frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+1}}{2}\right) = 1$$

geçerlidir. $-\hbar_j^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon^2 u'' dx$ terimi için kısmi integrasyon kuralını ve (3) interpolasyon kuadratür formülünü uygulayarak

$$\hbar_i^{-1}\varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} u' {\varphi_i^{(1)}}' dx + \hbar_i^{-1}\varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} u' {\varphi_i^{(2)}}' dx$$

buluruz. Buradan ve baz fonksiyonlarının tanımından

$$-\hbar_i^{-1}\varepsilon^2 u_{\bar{x}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)'}dx-\hbar_i^{-1}\varepsilon^2 u_x\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)'}dx=-\hbar_i^{-1}\varepsilon^2(u_x-u_{\bar{x}})$$

$$=-\varepsilon^2 u_{\hat{x}x,i} \qquad (20)$$

elde edilir. $\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}a(x)u(x)\varphi_i dx$ terimi için,

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}a(x)u(x)\varphi_i dx=\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[a(x)-a(x_i)+a(x_i)]u(x)\varphi_i dx$$

$$=-\hbar_i^{-1}a_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}u(x)\varphi_i dx+R_{a,i}$$

$$=-a_i\hbar_i^{-1}u_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i dx+R_i^{(1)}+R_{a,i}$$

$$=-a_iu_i+R_i^{(1)}+R_{a,i} \qquad (21)$$

yazabiliriz. Burada

$$R_{a,i}=-\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[a(x)-a(x_i)]u(x)\varphi_i dx$$

ve

$$R_i^{(1)}=\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}T_0(x-\xi)d\xi$$

olur. $\hbar_i^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}f(x,u)\varphi_i dx$ terimi için uygun düzenlemelerle

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f(x,u)\varphi_i dx=\hbar_i^{-1}\{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[f(x,u)-f(x_i,u)]\varphi_i dx$$

$$+\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[f(x_i,u)-f(x_i,u_i)]\varphi_i dx\}$$

$$+f(x_i,u_i)\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i dx=f(x_i,u_i)+R_{f,i}$$

buluruz. Burada

$$R_{f,i}=\hbar_i^{-1}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[f(x,u)-f(x_i,u)]\varphi_i dx+\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[f(x_i,u)-f(x_i,u_i)]\varphi_i dx\right\}$$

şeklindedir. O halde (20) ve (21) sonuçlarını birleştirir ve $R_i^{(2)}=R_{a,i}+R_{f,i}$ olmak üzere

$$R_i=R_i^{(1)}+R_i^{(2)} \qquad (22)$$

dersek,

$$-\varepsilon^2 u_{\hat{x}x,i}+a_iu_i=f(x_i,u_i)+R_i,\ i=1,\dots,N-1 \qquad (23)$$

$$u_0=u_N=0 \qquad (24)$$

fark problemini elde ederiz. Buradan y yaklaşık çözümü için

$$-\varepsilon^2 y_{\hat{x}x,i}+a_iy_i=f(x_i,y_i),\ i=1,\dots,N-1 \qquad (25)$$

$$y_0=y_N=0 \qquad (26)$$

fark problemi yazılabilir.

4.1. Parçalı Düzgün Şebeke Noktaları

$\varpi_N = \{0 = x_1 < x_2 <\ldots< x_{N-1} < x_N = l\}$ şebekesinin noktalarını parçalı düzgün şebeke olarak belirleyelim. Bunun için geçiş noktasını

$$\sigma_1 = \min_i (\tfrac{l}{4}, \alpha^{-1}\varepsilon ln\varepsilon\}, \ \sigma_2 = l - \sigma_1$$

ile belirleyelim. $[0, l]$ aralığını $[0, \sigma_1] \cup [\sigma_1, \sigma_2] \cup [\sigma_2, l]$ olarak parçalayalım. Burada $\sigma_2 = l - \sigma_1$ olur. x_i düğümleri

$$x_i = \begin{cases} x_0 + (i-1)\dfrac{4\sigma_1}{N}, \ i = 0,1,\ldots,\dfrac{N}{4}, \ x_i \in [0,\sigma_1], \qquad \sigma_1 < \dfrac{1}{4}, \\ \sigma_1 + \left(i - 1 - \dfrac{N}{4}\right)\dfrac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{N}, \ i = \dfrac{N}{4} + 1, \ldots, \dfrac{3N}{4}, \ x_i \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ \sigma_2 - \left(i - 1 - \dfrac{3N}{4}\right)\dfrac{4\sigma_1}{N}, \ i = \dfrac{3N}{4} + 1, \ldots, N, \ x_i \in [\sigma_2, l] \end{cases}$$

şeklinde belirlenir (Boglaev, 1984).

4.2. Hata Değerlendirmeleri

Bu metodun düzgün yakınsaklığını araştırmak için $z = y - u$, $(x,t) \in D$ hata fonksiyonu aşağıdaki

$$\varepsilon^2 z_{\hat{x}x,i} - a_i z_i = R_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$
$$z_0 = z_N = 0$$

ayrık probleminin çözümü olsun. Burada R_i, (22) ifadesindeki gibidir. Parçalı düzgün şebekede hata değerlendirmesi için aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 1. y_i, u_i sırasıyla (23)-(24) ve (25)-(26) problemlerinin çözümleri olsun. Parçalı düzgün şebekede hata değerlendirmesi

$$|y_i - u_i| \le CN^{-1}$$

biçimindedir.

İspat. $[0, \sigma_1], [\sigma_1, \sigma_2]$ ve $[\sigma_2, l]$ aralıklarındaki h_i değerleri için ayrı ayrı değerlendirme alalım. Önce $[0, \sigma_1]$ aralığında değerlendirme alalım. $\sigma_1 < \frac{1}{4}$ için $h_i = \frac{4\sigma_1}{N} \le lN^{-1}$ olur. $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ için $h_i = \frac{4l/4}{N} = lN^{-1}$ elde edilir. $[\sigma_1, \sigma_2]$ aralığı için $\sigma_1 < \frac{1}{4}$ olursa $h_i = \frac{2(l-2\sigma_1)}{N} \le lN^{-1}$ olacaktır. Ayrıca $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ için $h_i = \frac{2(l-2\sigma_1)}{N} = lN^{-1}$ bulunur. $[\sigma_2, l]$ aralığı için de $[0, \sigma_1]$ aralığındaki benzer işlemler yapılırsa $|y_i - u_i| \le CN^{-1}$ olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5. Nümerik Örnek

$$-\varepsilon^2 u''(x) + x(1-x)u(x) = u + u^2, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

test problemini ele alalım. Düzgün olmayan şebekede (25)-(26) fark şemasını düzenlersek $y_i^{(0)} = -2, \ i = 1,2,\ldots,N-1$ başlangıç iterasyonu olmak üzere test problemi

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i\,, i = 1, \ldots, N-1$$

$$y_0 = y_N = 0$$

biçiminde düzenlenir.

$$A_i = B_i = \varepsilon^2 h^{-2} \theta_i,$$

$$C_i = 2\varepsilon^2 \theta_i \theta_i + a_i - \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u},$$

$$F_i = f(x_i, y_i^{(n-1)}) - y_i^{(n-1)} \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u}$$

biçiminde yazılır. Burada kovma algoritması ve iterasyon birlikte uygulanmaktadır. Bu katsayılar için de kovma algoritması $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}\,, \qquad \alpha_1 = 0, i = 1, \ldots, N-1$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - \alpha_i A_i}\,, \qquad \beta_1 = 0, i = 1, \ldots, N-1$$

ve

$$y_i = y_{i+1} \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = N-1, \ldots, 0$$

bağıntılarıyla belirlenir (Samarskii, 2001). Ele alınan test probleminin analitik çözümü bilinmediğinden mutlak hatalar

$$r_1 = \max_{0 < i < N} \left| y^i{}_h - y^i{}_{\frac{h}{2}} \right|, \qquad r_2 = \max_{0 < i < N} \left| y^i{}_{\frac{h}{2}} - y^i{}_{\frac{h}{4}} \right|$$

ile bulunur. Düzgün yakınsama oranı ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$p = \frac{ln \frac{r_1}{r_2}}{ln 2}$$

(Kopteva, 2004). Buna göre elde edilen sonuçlar tabloda sunulmaktadır.

Tablo 1. $\varepsilon = 10^{-w}$ $(w = 3,4,6,8,10,12,14)$ değeri için parçalı düzgün şebeke noktalarında elde edilen yakınsama oranı

ε	N=16	N=32	N=64
10^{-3}	r0= 0.0216037514	r0= 0.0422691789	r0= 0.1475952452
	r1= 0.0035870910	r1= 0.0076255811	r1= 0.1591666848 p=-
	p= 2.5903955986	p= 2.4706869058	0.1088921507
10^{-4}	r0= 0.0132464055	r0= 0.0368300697	r0= 0.0091170701
	r1= 0.0014274923	r1= 0.0065623973	r1= 0.0986958956 p=-
	p= 3.2140460390	p= 2.4885892759	3.4363479116
10^{-6}	r0= 0.0062771390	r0= 0.0214728273	r0= 0.0421738984
	r1= 0.0003200986	r1= 0.0035596226	r1= 0.0075570504
	p= 4.2935190702	p= 2.5927159691	p= 2.4804552353
10^{-8}	r0= 0.0036119976	r0= 0.0132352785	r0= 0.0368162077
	r1= 0.0001046047	r1= 0.0014259097	r1= 0.0065602069
	p= 5.1097772213	p= 3.2144340138	p= 2.4885278066

10^{-10}	r0= 0.0023361333 r1= 0.0000433557 p= 5.7517575416	r0= 0.0088347786 r1= 0.0006377722 p= 3.7920808392	r0= 0.0281637192 r1= 0.0055225521 p= 2.3504308308
10^{-12}	r0= 0.0016316189 r1= 0.0000210224 p= 6.2782358095	r0= 0.0062770583 r1= 0.0003200930 p= 4.2935255964	r0= 0.0214726953 r1= 0.0035595949 p= 2.5927183080
10^{-14}	r0= 0.0012030695 r1= 0.0000113872 p= 6.7231683005	r0= 0.0046758817 r1= 0.0001763746 p= 4.7285238550	r0= 0.0166790231 r1= 0.0022349591 p= 2.8997144443

6. Sonuç ve Öneriler

Sürekli problem için çözümün kararlılığı maksimum prensibi ve karşılaştırma teoremleri kullanılarak incelenmiş ve asimptotik değerlendirmeler alınmıştır. Böylece çözümün başlangıç verilerine bağlı olduğu gösterilmiştir. Singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemleri için kalan terimi integral biçiminde olan ve lineer baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları uygulanarak fark şemaları parçalı düzgün şebekede (Shishkin mesh) kurulmuştur. Nümerik algoritmada lineer olmayan terimden dolayı Newton-Raphson metodu kullanılmıştır. Yaklaşık çözümün ayrık maksimum normda kesin çözüme ε'a göre düzgün yakınsak olduğu ispatlanmış ve yaklaşık çözümün yakınsama oranı O(N^(-1)) olarak belirlenmiştir. Ele alınan problemin nümerik çözümlerine ait alınan teorik sonuçlar, örnek üzerinde test edilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçları desteklediği tablodan görülmektedir.

Bu problemin değişik fiziksel özelliklere sahip olan türleri -gecikmeli, kısmi türevli biçimleri gibi- için de nümerik araştırmalar yapılabilir.

7. Kaynaklar

Amiraliyev, G., Duru H., 2002. "Nümerik Analiz", Pegem Yayıncılık.

Amiraliyev G. M., Mamedov Y.D.,1995. "Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations", Tr. J. of Math., 19, 207-222.

Auchmutyi, J. F. G., Nicolis, G., 1976. Bulletin of Mathematical Biology. Bifurcation analysis of reaction-diffusion equations, 8:325-350.

Boglaev, I. P., 1984. Approximate solution of a nonlinear boundary value problem with a small parameter fort he highest-order differential. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., 24(6):30-35.

Cantrell, R. S., Cosner, C., 2003. Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations, Department of Mathematics, University of Miami, U.S.A.

Chaplain, M. A. J., 1995. "Reaction-diffusion prepatterning and its potential role in tumour invasion". Journal of Biological Systems, 3(4):929-936.

Fife, P. C., 1979. "Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems", Springer.

Gatenby, R. A., Gawlinski E.T., 1996. "A Reaction-Diffusion Model Cancer Research", 56: 5745-5753.

Grindrod, P., 1991. Patterns and Wawes: "The Theory And Applications of Reaction-Diffusion Equations", Clerandon Press.

Harrison, L. G., 1993. "Kinetic Theory of Living Pattern", Cambridge University Press.

Holmes, E. E. et al., 1994. “Partial Differential Equations in Ecology: Spatial Interactions and Population Dynamics”. Ecology 75(1):17-29.

Kerner, B. S., Osipov, V.V., 1994. “Autosolitons: A New Approach to Problems of Self-Organization and Turbulence”, Kluwer Academic Publishers.

Kopteva, N., Stynes, M., 2004. “Numerical analysis of a singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problem with multiple solitions”. Applied Numerical Mathematics 51: 273-288.

Mei, Z., 2000. “Numerical Bifurcation Analysis for Reaction-Diffusion Equations”, Springer, Berlin.

Meinhardt, H., 1982. “Models of Biological Pattern Formation”, Academic Press, London.

Mikhailov, A. S., 1990. “Foundations of Synergetics I, Distributed Active Systems”, Springer.

Murray, J. D., 1986. “On the spatial spread of rabies among foxes”. Proc. R. Soc. Lond. B, 229(1225): 111-150.

Murray, J. D., 2013. “Mathematical Biology”, Springer Science&Business Media, 17: 436-450.

Ruuth, J. S., 1995. “Implicit-explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation”. Journal of Mathematical Biology, volume 34, Issue 2, pp 148-176.

Samarskii, A.A., 2001. “The Theory of Difference Schemes”. Moscow M.V. Lomonosov State University, Russia.

Sherratt, J. A., Murray, J.D., 1990. “Models of epidermal wound healing”. Proc. R. Soc. Lond. B, 241:29-36.

Sherratt, J. A., Nowak, M.A., 1992. “Oncogenes, anti-oncogenes and the Immume response to cancer: A mathematical model”. Proc. R. Soc. Lond. B, 248(1323): 261-271.

Skellam, J. G., 1991. “Random Dispersal in Theoretical Populations”. Bulletin of Mathematical Biology, 53(½): 135-165.

Smoller, J., 1994. Shock Waves and Reaction Diffusion Equations, Springer.

Turing, A. M., 1952. “The chemical basis of morphogenesis”, Philosopical Transactions of the Royal Society of London Series B, 237(641): 37-72, University of Manchester, Biological Sciences.